

∞ Évaluation ESciA session 25 mars 2023 ∞

Mathématiques expertes Épreuve 2 , option A

Durée : 1h 30 min

FONCTIONNEMENT DES QUESTIONS

- Les questions à *choix multiples* sont numérotées M1, M2 etc. Le candidat y répond en **noircissant** la case correspondant à sa réponse dans la feuille-réponse \square .
Pour chacune de ces questions, il y a une et une seule bonne réponse.
Toute réponse fausse retire des points aux candidats.
Noircir plusieurs réponses à une même question a un effet de neutralisation (le candidat récoltera 0 point).
- Les questions à *réponse brute* sont numérotées L1, L2 etc.
Elles ne demandent aucune justification : les résultats sont reportés par le candidat dans le cadre correspondant sur la feuille-réponse Δ . Tout débordement de cadre est interdit.
- Les questions à *réponse rédigée* sont numérotées RI, R2, etc. Elles sont écrites dans le cadre correspondant sur la feuille-réponse \circ ou la feuille-réponse Δ , selon le symbole précédant le numéro de la question. Tout débordement de cadre est interdit.

CONSEILS DE BON SENS

- L'énoncé est (très) long : il n'est absolument pas nécessaire d'avoir tout traité pour avoir une note et un classement excellents.
- Ne vous précipitez pas pour reporter vos réponses, notamment aux questions à choix multiples. Il est préférable d'avoir terminé un exercice avant d'en reporter les réponses.
- Ne répondez jamais au hasard à une question à choix multiples!
- Selon l'exercice, les questions peuvent être dépendantes les unes des autres ou non. Soyez attentifs à la variété des situations.

Exercice 1. Nombres complexes

M1 Le produit $(1 - 3i)(4 + i)$ vaut :

- A** $1 - 13i$ **B** $-4 + 10i$ **C** $7 - 11i$ **D** $-7 - 10i$ **E** $7 + 11i$

M2 Le nombre complexe $5 + 12i$ a pour module :

- A** 106 **B** 17 **C** $\sqrt{13}$ **D** $\sqrt{17}$ **E** 13

M3 L'inverse du nombre complexe $3 + 4i$ est :

- A** $\frac{3}{5} - \frac{4}{5}i$ **B** $\frac{3}{25} - \frac{4}{25}i$ **C** $\frac{1}{3} + \frac{1}{5}i$ **D** $\frac{1}{3} - \frac{1}{5}i$ **E** $\frac{1}{3} + \frac{1}{4}i$

L1 Mettre le quotient $\frac{7+i}{1+2i}$ sous la forme $a + ib$, avec a et b réels.

M4 L'équation $z^2 - 6z + 11 = 0$ possède pour solutions complexes :

- A** $\frac{3+2i\sqrt{2}}{2}$ et $\frac{3-2i\sqrt{2}}{2}$
 B $-3+2i\sqrt{2}$ et $-3+2i\sqrt{2}$
 C $-3+i\sqrt{2}$ et $-3-i\sqrt{2}$
 D aucune de ces réponses
 E $3+i\sqrt{2}$ et $3-i\sqrt{2}$

M5 Le nombre de solutions complexes de l'équation $z^5 = 1$ est :

- A** 4 **B** 5 **C** 3 **D** 1 **E** 2

M6 Le nombre de solutions complexes z vérifiant simultanément $z^{15} = 1$ et $z^{25} = 1$ est :

- A** fini et compris strictement entre 1 et 5
 B fini et au moins égal à 5
 C infini
 D 1
 E nul

Donner, en justifiant votre réponse, le nombre exact de nombres complexes z vérifiant simultanément $z^{15} = 1$ et $z^{25} = 1$.

M7 Le module et un argument de $(-1 + i\sqrt{3})^2$ sont respectivement :

- A** $\sqrt{2}$ et $-\frac{\pi}{6}$ **B** 4 et $-\frac{2\pi}{3}$ **C** 2 et $-\frac{2\pi}{3}$ **D** 2 et $-\frac{\pi}{3}$ **E** 4 et $\frac{2\pi}{3}$

M8 Soit $a \in]0 ; \pi[$. Le nombre complexe $z = -i \cos a - \sin a$ est alors égal à :

- A** $e^{i(a-\pi/2)}$ **B** e^{ia} **C** e^{-ia} **D** $e^{i(a+\pi)/2}$ **E** $-e^{ia}$

M9 Soit $a \in]-\pi ; \pi[$. Le nombre complexe $z = 1 + \cos a - i \sin a$ est alors égal à :

- A** $2 \cos(a/2)e^{ia/2}$ **B** $2 \cos(a/2)e^{-ia/2}$ **C** $e^{-ia/2}$ **D** $-e^{-ia/2}$ **E** $2 \sin(a/2)e^{ia/2}$

M10 Le nombre complexe $\left(\frac{1+i\sqrt{3}}{1+i}\right)^{2401}$ vaut :

- A** $\sqrt{2}^{2401} e^{i\frac{\pi}{12}}$ **B** $\sqrt{2}^{2401} e^{-i\frac{\pi}{12}}$ **C** $2^{2401} e^{i\frac{\pi}{12}}$ **D** 1 **E** $e^{2401} e^{-i\frac{\pi}{12}}$

Exercice 2. Semi-inverses d'une fonction

Dans tout cet exercice, on se donne deux fonctions f et g , définies en tout réel et à valeurs réelles. On introduit quatre conditions :

- (f, g) vérifie C_1 lorsque $g(f(x)) = x$ pour tout réel x .
- (f, g) vérifie C_2 lorsque $f(g(y)) = y$ pour tout réel y .
- (f, g) vérifie C_3 lorsque $f(g(f(x))) = f(x)$ pour tout réel x .
- (f, g) vérifie C_4 lorsque $g(f(g(y))) = g(y)$ pour tout réel y .

Par exemple :

- lorsque $f(x) = \frac{x}{2}$ pour tout réel x , et $g(y) = 2y$ pour tout réel y , les conditions C_1 et C_2 sont évidemment vérifiées;
- lorsque $f(x) = \frac{x}{2}$ pour tout réel x , et $g(y) = y + 1$ pour tout réel y , la condition C_1 n'est pas vérifiée, car l'égalité $\frac{x}{2} + 1 = x$ ne vaut pas pour $x = 0$ (par exemple).

Pour un réel y , on pose $\text{sgn}(y) = 1$ si $y \geq 0$, et $\text{sgn}(y) = -1$ si $y < 0$.

On dit qu'une fonction est constante lorsqu'elle ne prend qu'une seule valeur.

On introduit enfin les cinq fonctions particulières f_1, f_2, g_1, g_2 et g_3 qui suivent :

- f_1 associe à tout réel x le réel $f_1(x) = e^x$;
- f_2 associe à tout réel x le réel $f_2(x) = x^2$;
- g_1 associe à tout réel y le réel $g_1(y) = \ln(y)$ si $y > 0$, et $g_1(y) = 0$ sinon;
- g_2 associe à tout réel y le réel $g_2(y) = \sqrt{|y|}$;
- g_3 associe à tout réel y le réel $g_3(y) = \text{sgn}(y)$.
Par exemple, $g_3(-4) = -2$ et $g_3(9) = 3$.

Vrai ou faux? Dans les questions **M11** à **M27**, on demande d'évaluer la validité des affirmations indiquées.

M11 La condition C_1 est vérifiée par le couple (f_1, g_1) .

- A** Faux **B** Vrai

M12 La condition C_2 est vérifiée par le couple (f_1, g_1) .

- A** Faux **B** Vrai

M13 La condition C_1 est vérifiée par le couple (f_2, g_2) .

- A** Faux **B** Vrai

M14 La condition C_2 est vérifiée par le couple (f_2, g_2) .

A Faux B Vrai

M15 La condition C_3 est vérifiée par le couple (f_2, g_2) .

A Faux B Vrai

M16 La condition C_4 est vérifiée par le couple (f_2, g_2) .

A Faux B Vrai

M17 La condition C_1 est vérifiée par le couple (f_2, g_3) .

A Faux B Vrai

M18 La condition C_2 est vérifiée par le couple (f_2, g_3) .

A Faux B Vrai

M19 La condition C_3 est vérifiée par le couple (f_2, g_3) .

A Faux B Vrai

M20 La condition C_4 est vérifiée par le couple (f_2, g_3) .

A Faux B Vrai

M21 Quel que soit le choix des fonctions f et g , si la condition C_1 est vérifiée alors la condition C_2 l'est aussi.

A Faux B Vrai

M22 Quel que soit le choix des fonctions f et g , si les conditions C_3 et C_4 sont vérifiées alors la condition C_1 est vérifiée.

A Faux B Vrai

M23 Quel que soit le choix des fonctions f et g , si la condition C_1 est vérifiée alors les conditions C_3 et C_4 sont vérifiées.

A Faux B Vrai

M24 Si C_1 est vérifiée alors f prend toutes les valeurs réelles possibles.

A Faux B Vrai

M25 Si C_1 est vérifiée et f prend toutes les valeurs réelles possibles alors C_2 est vérifiée.

A Faux B Vrai

M26 Si C_3 est vérifiée et f prend toutes les valeurs réelles possibles alors C_1 est vérifiée.

A Faux B Vrai

M27 Si C_3 est vérifiée et f prend toutes les valeurs réelles possibles alors C_2 est vérifiée.

A Faux B Vrai

M28 Pour la fonction f qui à x associe $x + 1$:

- A Il existe plusieurs fonctions g telles que C_1 soit vérifiée
 B Il n'existe aucune fonction g telle que C_1 soit vérifiée
 C Il existe exactement une fonction g tel que C_1 soit vérifiée

M29 Pour la fonction f qui à x associe $|x|$:

- A Il n'existe aucune fonction g telle que C_1 soit vérifiée
 B Il existe plusieurs fonctions g telles que C_1 soit vérifiée
 C Il existe exactement une fonction g tel que C_1 soit vérifiée

Δ **L2** On suppose que la fonction g est constante. Expliciter sans démonstration les fonctions f telles que C_3 soit vérifiée.

R2 Démontrer que f est constante si et seulement si la propriété C_3 est vérifiée quelle que soit la fonction g .

Suite itérée croisée

On fixe un réel a et l'on définit une suite $(u_n)_{n \geq 0}$ à termes réels en posant $u_0 = a$ et, pour tout entier naturel n :

$$u_{n+1} = \begin{cases} g(u_n) & \text{si } n \text{ est pair} \\ f(u_n) & \text{si } n \text{ est impair} \end{cases}$$

M30 En supposant validée la condition C_2 , quelle est, parmi celles des affirmations suivantes qui sont vraies indépendamment des choix de a , f et g , celle qui apporte l'information la plus précise?

- A La suite u est constante
 B La suite u prend au plus 4 valeurs distinctes
 C La suite u prend au plus 3 valeurs distinctes
 D La suite u prend au plus 2 valeurs distinctes
 E La suite u prend un nombre fini de valeurs ou une infinité de valeurs

M31 En supposant validée la condition C_3 , quelle est, parmi celles des affirmations suivantes qui sont vraies indépendamment des choix de a , f et g , celle qui apporte l'information la plus précise?

- A La suite u prend au plus 3 valeurs distinctes
 B La suite u prend un nombre fini de valeurs ou une infinité de valeurs
 C La suite u prend au plus 4 valeurs distinctes
 D La suite u prend au plus 2 valeurs distinctes
 E La suite u prend au plus 5 valeurs distinctes

M32 En supposant validée la condition C_4 , quelle est, parmi celles des affirmations suivantes qui sont vraies indépendamment des choix de a , f et g , celle qui apporte l'information la plus précise?

- A La suite u prend au plus 4 valeurs distinctes

- B La suite u prend au plus 5 valeurs distinctes
 C La suite u prend au plus 3 valeurs distinctes
 D La suite u prend un nombre fini de valeurs ou une infinité de valeurs
 E La suite u prend au plus 2 valeurs distinctes

Exercice 3. Questions de divisibilité

Dans les questions **M33** à **M36**, on se donne un entier naturel impair p différent de 1, et a un entier naturel non nul.

M33 L'implication « si p divise a alors a est impair » :

- A est vraie sous l'hypothèse que p est premier, mais n'est pas toujours vraie
 B peut tomber en défaut même si p est premier
 C est toujours vraie

M34 L'implication « si p divise $2a$ alors p divise a » :

- A est toujours vraie
 B peut tomber en défaut même si p est premier
 C est vraie sous l'hypothèse que p est premier, mais n'est pas toujours vraie

M35 L'implication « si p divise a^2 alors p divise a » :

- A peut tomber en défaut même si p est premier
 B est toujours vraie
 C est vraie sous l'hypothèse que p est premier, mais n'est pas toujours vraie

M36 L'implication « si p divise $8a^2$ alors p divise a » :

- A est toujours vraie
 B est vraie sous l'hypothèse que p est premier, mais n'est pas toujours vraie
 C peut tomber en défaut même si p est premier

Dans la suite de l'exercice, on se donne un nombre premier p impair, ainsi que deux entiers naturels a et b non nuls.

M37 Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Le nombre de diviseurs positifs de p^n est :

- A $p^n - 1$ B n C $n + 1$ D $n - 1$ E p^{n-1}

M38 L'affirmation « $p + 1$ a strictement plus de diviseurs que p » :

- A est systématiquement fausse
 B est systématiquement vraie
 C peut être vraie ou fausse, selon la valeur de p
 R3 Justifier votre réponse à la question **M38**.

M39 Si a a exactement trois diviseurs positifs alors on peut affirmer que :

- A a est le carré d'un nombre premier
 B a est le cube d'un nombre premier
 C $a = 12$
 D a est le produit de deux nombres premiers distincts
 E a est premier

△ **L3** On suppose que a possède exactement trois diviseurs positifs et que b en possède exactement deux. Donner sans démonstration les valeurs possibles (lorsque a et b varient) pour le nombre D de diviseurs positifs de ab .

M40 Si le nombre de diviseurs positifs de a est premier et impair alors :

A a est premier

B $a = 1$

C a possède plusieurs diviseurs premiers

D a possède un unique diviseur premier, mais a n'est pas premier

Exercice 4. Nombres complexes et géométrie

Pour un nombre réel x , on note $[x]$ sa partie entière, c'est-à-dire l'unique entier relatif k tel que $k \leq x < k + 1$.

Pour un nombre complexe z , on note $d(z)$ le plus petit des deux réels $\text{Im}(z) - [\text{Im}(z)]$ et $[\text{Im}(z) + 1] - \text{Im}(z)$.

△ **L4** Donner une expression simplifiée de $d(1)$, $d\left(\frac{i}{2}\right)$ et $d\left(1 + \frac{5}{4i}\right)$.

Pour la suite de l'exercice, on se place dans un plan euclidien rapporté à un repère orthonormal, dans lequel sont calculés coordonnées et affixes des points. Il pourra être judicieux, pour interpréter la valeur de $d(z)$, de raisonner à l'aide des droites D_k et D_{k+1} pour k entier, où l'on note D_t la droite d'équation $y = t$.

M41 Quels que soient les réels x et y :

A $d(x + iy) = -d(y)$

B $d(x + iy) = d(x) + d(y)$

C $d(x + iy) = d(iy)$

D $d(x + iy) = d(x)$

E $d(x + iy) = d(x) - d(y)$

M42 Pour tout nombre complexe z :

A $d(-z) \neq -d(z)$ sauf si z est entier

B $d(-iz) = -d(z) + 1$ si z est entier

C $d(-z) = -d(z)$

D $d(-z) = d(z)$ si est z rationnel, et seulement dans ce cas

E $d(-z) = d(z)$

M43 Pour tout nombre complexe z et tout entier relatif q :

A $d(z + iq) = d(z)$

B $d(z + iq) = d(z) + iq$

C $d(z + iq) = d(iq)$

D $d(z + iq) = d(z) - q$

E $d(z + iq) = d(z) - i(q)$

M44 Lorsque z décrit \mathbb{C} , le nombre complexe $d(z)$ décrit :

A $[0; 1[$

B $[0; 1]$

C $]-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}]$

D $[0; \frac{1}{2}]$

E $[0; \frac{1}{2}[$

Pour un nombre complexe z , on note

$$t(z) = \operatorname{Re}(z) + id(z).$$

À tout point M du plan, d'affixe z , on associe le point $T(M)$ d'affixe $t(z)$.

On considère enfin les points M_1 et M_2 d'affixes respectives 1 et $1 + i$, ainsi que le milieu M_3 du segment $[M_1 ; M_2]$.

M45 Laquelle des affirmations suivantes est vraie?

- A** $T(M_1) = T(M_3)$
 B $T(M_3)$ est le milieu du segment $[T(M_1), T(M_2)]$
 C $T(M_1) = M_3$
 D $T(M_1) = M_1$ et $T(M_3) = M_3$
 E $T(M_1) = M_2$

Étant donné deux réels a et b tels que $a \leq b$, on note $I_{a,b}$ l'ensemble des complexes z tels que $a \leq \operatorname{Im}(z) \leq b$.

M46 Soit n un entier naturel non nul. Sur l'ensemble $I_{n, n+\frac{1}{2}}$ la fonction qui à M associe $T(M)$ agit comme :

- A** Une translation selon un vecteur non nul
 B Une symétrie centrale
 C Une symétrie orthogonale
 D La fonction identité
 E Une projection orthogonale

M47 Soit n un entier naturel non nul. Sur l'ensemble $I_{n+\frac{1}{2}, n+1}$ la fonction qui à M associe $T(M)$ agit comme :

- A** La fonction identité
 B Une symétrie centrale
 C Une symétrie orthogonale
 D Une translation selon un vecteur non nul
 E Une projection orthogonale

Exercice 5. Ensembles bien ordonnés

Soit A un ensemble formé de nombres réels (autrement dit, une partie de \mathbb{R}).

- Un **plus petit élément** de A est un élément a de A tel que $a \leq x$ pour tout x dans A .
- Un **plus grand élément** de A est un élément b de A tel que $x \leq b$ pour tout x dans A .

On dit que A est **bien ordonné** lorsque toute partie non vide de A admet un plus petit élément. Par exemple :

- $\{0 ; 1\}$ est bien ordonné car ses parties non vides sont $\{0 ; 1\}$, $\{0\}$ et $\{1\}$, et chacune a un plus petit élément (respectivement : 0, 0 et 1);
- \mathbb{N} est bien ordonné (cela doit être considéré comme évident);
- $[0 ; 1]$ n'est pas bien ordonné car, par exemple, $\left] \frac{1}{3} ; \frac{2}{3} \right]$ est dénué de plus petit élément bien que non vide.

On rappelle enfin qu'un ensemble est **fini** lorsqu'il n'a qu'une quantité finie d'éléments, et infini dans le cas contraire (par exemple, le segment $[0; 1]$ est infini).

△ **L5** Parmi les ensembles suivants, indiquer sans démonstration lesquels sont bien ordonnés :

$$\{0; 1; \sqrt{2}\}, [0; +\infty[,]0; 1], \mathbb{N}^*, \mathbb{Z} \text{ et } \mathbb{R}$$

M48 Une partie bien ordonnée et non vide de \mathbb{R} :

A admet nécessairement un plus grand élément et un plus petit élément

B admet nécessairement un plus grand élément, mais pas nécessairement un plus petit élément

C peut n'avoir ni plus grand élément, ni plus petit élément

D admet nécessairement un plus petit élément, mais pas nécessairement un plus grand élément

Vrai ou faux (1) ?

Dans les questions **M49** à **M54**, on demande d'évaluer la validité des affirmations indiquées.

M49 Toute partie finie de \mathbb{R} est bien ordonnée.

A Vrai **B** Faux

M50 Toute partie bien ordonnée de \mathbb{R} est finie.

A Faux **B** Vrai

M51 Tout sous-ensemble non vide d'un ensemble bien ordonné est bien ordonné.

A Faux **B** Vrai

M52 L'ensemble constitué des nombres de la forme $\frac{n-1}{n}$, avec $n \in \mathbb{N}^*$, est bien ordonné.

A Faux **B** Vrai

M53 L'ensemble constitué des nombres de la forme $\frac{1}{n}$, avec $n \in \mathbb{N}^*$, est bien ordonné.

A Faux **B** Vrai

M54 L'ensemble constitué des nombres de la forme $\frac{n^2 + 1}{2023n + \sin(n) + 1}$, avec $n \in \mathbb{N}$, est bien ordonné.

A Faux **B** Vrai

R4 Justifier votre réponse à la question **M54**.

Vrai ou faux (2) ?

Dans les questions **M55** à **M59**, on demande d'évaluer la validité des affirmations indiquées.

M55 Pour toute partie bien ordonnée A de \mathbb{R} et tout segment $[a; b]$ de \mathbb{R} , l'intersection $[a; b] \cap A$ (constituée des éléments communs à A et $[a; b]$) est finie.

A Faux B Vrai

M56 Quelles que soient les parties bien ordonnées A et B de \mathbb{R} , leur réunion $A \cup B$ (constituée des réels appartenant à au moins l'une des parties A et B) est bien ordonnée.

A Faux B Vrai

M57 Quelles que soient les parties bien ordonnées A et B de \mathbb{R} , l'ensemble $A \Delta B$, formé des réels appartenant à un et un seul des ensembles A et B , est bien ordonné.

A Vrai B Faux

M58 Toute partie bien ordonnée A de \mathbb{R} ayant un plus grand élément est finie.

A Vrai B Faux

M59 Pour toute partie A de \mathbb{R} , si A et $-A$ (formé des nombres de la forme $-x$, avec x dans A) sont bien ordonnées alors A est finie.

A Faux B Vrai

R5 Justifier votre réponse à la question **M59**.

Isordonnies

Étant donné deux parties A et B de \mathbb{R} , une **isordonnie** de A dans B est une fonction f d'ensemble de définition A , à valeurs dans B et qui vérifie les deux conditions suivantes :

(C) : f est strictement croissante, autrement dit $f(x_1) < f(x_2)$ quels que soient x_1 et x_2 dans A vérifiant $x_1 < x_2$.

(P) : Pour toute valeur y atteinte par f , tout élément de B inférieur à y est une valeur atteinte par f .

Par exemple :

- La fonction de \mathbb{Z} dans \mathbb{Z} qui à k associe $-k$ vérifie la condition (P) mais pas la condition (C) : ce n'est donc pas une isordonnie.
- La fonction g de \mathbb{N} dans \mathbb{R} qui à k associe k vérifie la condition (C) mais pas la condition (P) (par exemple 1 est atteint par g , mais pas $\frac{1}{2}$). Ce n'est donc pas une isordonnie.

Δ **L6** On note $2\mathbb{N}$ l'ensemble des entiers naturels pairs. Parmi les cinq assertions suivantes, indiquer sans justification lesquelles sont vraies :

- (A1) La fonction identité est une isordonnie de \mathbb{N} dans \mathbb{N} .
- (A2) La fonction identité est une isordonnie de \mathbb{N}^* dans \mathbb{N} .
- (A3) La fonction identité est une isordonnie de $2\mathbb{N}$ dans \mathbb{N} .
- (A4) La fonction qui à n associe $2n$ est une isordonnie de \mathbb{N} dans $2\mathbb{N}$.
- (A5) La fonction qui à n associe $n + 1$ est une isordonnie de \mathbb{N} dans \mathbb{N} .

Le raisonnement suivant, qui ne contient pas d'erreur formelle mais est insuffisamment détaillé, prétend démontrer que, pour n'importe quelle partie bien ordonnée A de \mathbb{R} , la fonction identité est la seule isordonnie de A dans A .

Soit A une partie bien ordonnée de \mathbb{R} , et f une isordonnée de A dans A . On raisonne par l'absurde en supposant que f n'est pas la fonction identité.

- (1) L'ensemble des éléments x de A tels que $f(x) \neq x$ est une partie non vide de A , que l'on note A_0 .
- (2) L'ensemble A_0 possède un plus petit élément y .
- (3) On a $f(x) = x$ pour tout élément x de A strictement inférieur à y .
- (4) On ne peut donc avoir $f(y) < y$.
- (5) On ne peut pas non plus avoir $f(y) > y$.
- (6) On a ainsi une contradiction.

Dans les questions suivantes, on demande des précisions quant aux détails manquants dans le raisonnement.

M60 La validité de l'étape (1) :

- A** nécessite d'utiliser simultanément les hypothèses (P) et (C)
- B** nécessite d'utiliser l'hypothèse (C), mais pas l'hypothèse (P)
- C** ne nécessite d'utiliser ni l'hypothèse (C) ni l'hypothèse (P)
- D** nécessite d'utiliser l'hypothèse (P), mais pas l'hypothèse (C)

M61 Les étapes précédentes étant considérées acquises, la validité de l'étape (2) :

- A** nécessite d'utiliser simultanément les hypothèses (P) et (C)
- B** nécessite d'utiliser l'hypothèse (C), mais pas l'hypothèse (P)
- C** nécessite d'utiliser l'hypothèse (P), mais pas l'hypothèse (C)
- D** ne nécessite d'utiliser ni l'hypothèse (C) ni l'hypothèse (P)

M62 Les étapes précédentes étant considérées acquises, la validité de l'étape (3) :

- A** ne nécessite d'utiliser ni l'hypothèse (C) ni l'hypothèse (P)
- B** nécessite d'utiliser simultanément les hypothèses (P) et (C)
- C** nécessite d'utiliser l'hypothèse (C), mais pas l'hypothèse (P)
- D** nécessite d'utiliser l'hypothèse (P), mais pas l'hypothèse (C)

M63 Les étapes précédentes étant considérées acquises, la validité de l'étape (4) :

- A** nécessite d'utiliser l'hypothèse (P), mais pas l'hypothèse (C)
- B** ne nécessite d'utiliser ni l'hypothèse (C) ni l'hypothèse (P)
- C** nécessite d'utiliser simultanément les hypothèses (P) et (C)
- D** nécessite d'utiliser l'hypothèse (C), mais pas l'hypothèse (P)

M64 Les étapes précédentes étant considérées acquises, la validité de l'étape (5) :

- A** nécessite d'utiliser l'hypothèse (C), mais pas l'hypothèse (P)
- B** nécessite d'utiliser simultanément les hypothèses (P) et (C)
- C** ne nécessite d'utiliser ni l'hypothèse (C) ni l'hypothèse (P)
- D** nécessite d'utiliser l'hypothèse (P), mais pas l'hypothèse (C)

M65 Les étapes précédentes étant considérées acquises, la validité de l'étape (6) :

- A** nécessite d'utiliser l'hypothèse (C), mais pas l'hypothèse (P)
- B** nécessite d'utiliser l'hypothèse (P), mais pas l'hypothèse (C)
- C** ne nécessite d'utiliser ni l'hypothèse (C) ni l'hypothèse (P)
- D** nécessite d'utiliser simultanément les hypothèses (P) et (C)

M66 Dans combien d'étapes est utilisée implicitement l'hypothèse voulant que A est bien ordonné?

A 4 B 1 C 2 D 3 E 0**Exercice 6. Nombre de distances entre n points du plan**

Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 3, et $E = \{P_1, \dots, P_n\}$ un ensemble constitué d'exactly n points du plan. On note D l'ensemble des distances entre ces points, c'est-à-dire l'ensemble des nombres réels $d > 0$ pour lesquels il existe deux points distincts P_i et P_j tels que $d = P_i P_j$. On note m le nombre d'éléments de D , appelé **nombre de distances** de E .

M67 On suppose dans cette question que $n = 3$. La plus petite valeur possible pour m est alors :

 A 5 B 4 C 2 D 1 E 3

M68 Sachant que les points de E sont alignés ou sur un même demi-cercle, la plus petite valeur possible pour m est :

 A $2n - 1$ B n C $2n + 1$ D $n - 1$ E $2n$

Δ **R6** Déterminer la plus grande valeur possible pour m sachant que les points de E sont alignés.

Δ **L7** On suppose $4 \leq n \leq 5$. Donner sans démonstration la plus petite valeur possible pour m .

M69 L'affirmation « dès que des points de E sont à même distance de P_1 , ces points sont sur un même demi-cercle de centre P_1 » :

A est vraie si $P_1 P_2$ est le plus grand élément de D , mais peut tomber en défaut sinon

B est toujours vraie

C peut être fausse même si $P_1 P_2$ est le plus grand élément de D

On note k le plus grand nombre possible de points de E que l'on puisse placer sur un même cercle de centre P_1 .

On note ℓ le nombre de réels distincts parmi $P_1 P_2, P_1 P_3, \dots, P_1 P_n$.

Δ **L8** Donner un réel a , en fonction de n et k et le plus grand possible, tel que $\ell \geq a$.

On suppose, en vue de la dernière question, que $P_1 P_2$ est le plus grand élément de D .

M69 En combinant les minoration de m déduites des questions **M68** et **L8**, et en examinant les valeurs possibles pour k , l'inégalité la plus fine que l'on puisse obtenir est :

 A $m \geq \frac{n}{2}$ B $m \geq \sqrt{n}$ C $m \geq \sqrt{n} - 1$ D $m \geq \frac{n}{4}$ E $m \geq \frac{1}{2}\sqrt{n}$