ঌ Évaluation ESciA session 16 mars 2024 ঌ

Mathématiques expertes Épreuve 2 , option A

Durée : 1h 30 min

FONCTIONNEMENT DES QUESTIONS

• Les questions à *choix multiples* sont numérotées M1, M2, etc. Le candidat y répond en **noircissant** la case correspondant à sa réponse dans la feuille-réponse □.
Pour chacune de ces questions, il y a une et une seule bonne réponse.
Toute réponse fausse retire des points aux candidats.
Noircir plusieurs réponses à une même question a un effet de neutralisation (le candidat récoltera 0 point).
• Les questions *à réponse brute* sont numérotées L1, L2 etc.
Elles ne demandent aucune justification : les résultats sont reportés par le candidat dans le cadre correspondant sur la feuille-réponse △. Tout débordement de cadre est interdit.
• Les questions *à réponse rédigée* sont numérotées RI, R2, etc. Elles sont écrites dans le cadre correspondant sur la feuille-réponse ◯ ou la feuille-réponse △, selon le symbole précédant le numéro de la question. Tout débordement de cadre est interdit.

CONSEILS DE BON SENS

• L'énoncé est (très) long : il n'est absolument pas nécessaire d'avoir tout traité pour avoir une note et un classement excellents.
• Ne vous précipitez pas pour reporter vos réponses, notamment aux questions à choix multiples. Il est préférable d'avoir terminé un exercice avant d'en reporter les réponses.
• Ne répondez jamais au hasard à une question à choix multiples !
• Selon l'exercice, les questions peuvent être dépendantes les unes des autres ou non. Soyez attentifs à la variété des situations.

Exercice 1. Nombres complexes : calculs

☐ **M1** Le produit des deux nombres complexes $2-3\text{i}$ et $\text{i}+2$ vaut :

A $7-4\text{i}$ B $1-4\text{i}$ C $1+4\text{i}$ D $7+4\text{i}$ E $1+6\text{i}$

☐ **M2** Soit x et y deux nombres réels. Le nombre complexe $(x-\text{i}y)^2$ est systématiquement égal à :

A $-x^2+y^2+2\text{i}xy$ B $x^2+y^2+2\text{i}xy$ C $x^2-y^2+2\text{i}xy$
D $x^2-y^2-2\text{i}xy$ E $x^2+y^2-2\text{i}xy$

☐ **M3** Le nombre complexe $\dfrac{1}{-11+\text{i}}$ vaut :

A $\dfrac{-11+\text{i}}{120}$ B aucune des autres réponses proposées C $\dfrac{-11-\text{i}}{120}$ D $\dfrac{11-\text{i}}{122}$ E $\dfrac{-11+\text{i}}{122}$

☐ **M4** Le quotient $\dfrac{1-5\text{i}}{3-\text{i}}$ vaut :

A $\dfrac{8-14\text{i}}{10}$ B $\dfrac{-2+14\text{i}}{10}$ C $\dfrac{8+14\text{i}}{\sqrt{10}}$ D aucune des autres réponses proposées E $\dfrac{8-14\text{i}}{\sqrt{10}}$

☐ **M5** Les solutions complexes de $5z^2+2z+1=0$ sont :

A $\dfrac{-1+2\text{i}}{5}$ et $\dfrac{-1-2\text{i}}{5}$

B $\dfrac{1+2\text{i}}{5}$ et $\dfrac{1-2\text{i}}{5}$

C $\dfrac{-1+2\text{i}}{10}$ et $\dfrac{-1-2\text{i}}{10}$

D $1+2\text{i}$ et $-1-2\text{i}$

E $\dfrac{1+2\text{i}}{10}$ et $\dfrac{1-2\text{i}}{10}$

△ **L1** Donner le module et un argument du nombre complexe $1-\text{i}$.

☐ **M6** Le module et un argument de $\dfrac{1+\text{i}\sqrt{3}}{2}$ sont :

A 1 et $\dfrac{\pi}{6}$

B 2 et $\dfrac{\pi}{6}$

C 1 et $\dfrac{\pi}{3}$

D $\dfrac{1+\sqrt{3}}{2}$ et $\dfrac{\pi}{3}$

E aucune des autres réponses proposées

☐ **M7** Le module et un argument de $\dfrac{4}{1+\text{i}\sqrt{3}}$ sont :

A aucune des autres réponses proposées

$\boxed{\text{B}}$ 1 et $-\dfrac{2\pi}{3}$

$\boxed{\text{C}}$ 4 et $\dfrac{2\pi}{3}$

$\boxed{\text{D}}$ 2 et $\dfrac{5\pi}{3}$

$\boxed{\text{E}}$ 2 et $\dfrac{\pi}{3}$

Exercice 2. Produit de convolution de deux suites

Dans tout l'exercice, on appelle suite réelle toute suite à termes réels définie à partir du rang 0.

Pour deux suites réelles u et v, on note $u = v$ pour signifier que $u_n = v_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Lorsque a désigne un nombre réel, on note $\tilde{a}$ la suite réelle dont tous les termes sont égaux à a, autrement dit $\tilde{a}_n = a$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. En particulier $\tilde{0}$ a tous ses termes nuls, et est appelée la suite nulle.

On note e la suite réelle définie par $e_0 = 1$ et $e_n = 0$ pour tout entier naturel $n \geqslant 1$.

Lorsque $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $v = (v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ désignent deux suites réelles, on définit une nouvelle suite réelle, notée $u \star v$ et appelée produit de convolution de u et v, en posant

$$\begin{array}{lcl}
(u \star v)_0 & = & u_0 v_0, \\
(u \star v)_1 & = & u_1 v_0 + u_0 v_1, \\
(u \star v)_2 & = & u_2 v_0 + u_1 v_1 + u_0 v_2, \\
\ldots\ldots\ldots & & \\
(u \star v)_n & = & u_n v_0 + u_{n-1} v_1 +_{n-2} v_2 + \ldots + u_1 v_{\ -1} + u_0 v_n.
\end{array}$$

△ **L2** On considère la suite u définie par $u_0 = 4, u_1 = 2$ et $u_n = 1$ pour tout entier $n \geqslant 2$. Donner la valeur de $(u \star u)_3$.

☐ **M8** On considère la suite u définie par $u_0 = 4$, $u_1 = 2$ et $u_n = 1$ pour tout entier $n \geqslant 2$. Alors $(u \star u)_{10}$ vaut :

$\boxed{\text{A}}$ 28 $\boxed{\text{B}}$ 29 $\boxed{\text{C}}$ 18 $\boxed{\text{D}}$ 12 $\boxed{\text{E}}$ 19

Vrai ou faux ?

Dans les questions **M9**, **M10**, **M11** et **M12**, on demande d'évaluer la validité des propositions indiquées.

☐ **M9** On a $u \star \tilde{0} = \tilde{0}$ pour toute suite réelle u.

$\boxed{\text{A}}$ Vrai $\boxed{\text{B}}$ Faux

☐ **M10** On a $u \star \tilde{1} = u$ pour toute suite réelle u.

$\boxed{\text{A}}$ Vrai $\boxed{\text{B}}$ Faux

☐ **M11** On a $u \star e = u$ pour toute suite réelle u.

$\boxed{\text{A}}$ Vrai $\boxed{\text{B}}$ Faux

☐ **M12** On a $u \star v = v \star u$ quelles que soient les suites réelles u et v.

$\boxed{\text{A}}$ Vrai $\boxed{\text{B}}$ Faux

☐ **M13** On considère la suite réelle w définie par $w_0 = 0, w_1 = 1$ et $w_n = 0$ pour tout entier naturel .
Pour toute suite réelle u et tout entier naturel n :

$\boxed{\text{A}}$ $(u \star w)_{n+1} = u_n$
$\boxed{\text{B}}$ aucune des autres réponses proposées n'est vraie en toute généralité
$\boxed{\text{C}}$ $(u \star w)_n = u_{n-1}$
$\boxed{\text{D}}$ $(u \star w)_n = u_{n+1}$

☐ **M14** On considère la suite réelle u définie par $u_n = 1$ si n est pair, et $u_n = 0$ si n est impair; on considère aussi la suite réelle v définie par $v_n = 0$ si n est pair, et $v_n = 1$ si n est impair.
Pour tout entier naturel n :

$\boxed{\text{A}}$ $(u \star v)_n = (n+2)/2$ si n est pair, et $(u \star v)_n = 0$ si n est impair
$\boxed{\text{B}}$ $(u \star v)_n = n/2$ si n est pair, et $(u \star v)_n = 0$ si n est impair
$\boxed{\text{C}}$ $(u \star v)_n = (n-1)/2$ si n est impair, et $(u \star v)_n = 0$ si n est pair
$\boxed{\text{D}}$ aucune des autres réponses proposées n'est vraie en toute généralité
$\boxed{\text{E}}$ $(u \star v)_n = (n+1)/2$ si n est impair, et $(u \star v)_n = 0$ si n est pair

Suites arithmétiques/géométriques

Dans les questions **M15** à **M19**, on fixe deux suites réelles u et v. On rappelle que toute suite constante est arithmétique (de raison 0).

☐ **M15** Si u et v sont constantes, alors $u \star v$:

$\boxed{\text{A}}$ est arithmétique
$\boxed{\text{B}}$ peut n'être ni arithmétique ni géométrique, selon le choix de U
$\boxed{\text{C}}$ est géométrique

☐ **M16** Si u et v sont arithmétiques alors $u \star v$:

$\boxed{\text{A}}$ n'est jamais arithmétique
$\boxed{\text{B}}$ peut être arithmétique ou non, selon le choix de u et v
$\boxed{\text{C}}$ est arithmétique

△ **L3** On suppose u géométrique de raison 2 et v géométrique de raison 4. Donner une expression simplifiée de $(u \star v)_n$ en fonction de n, u_0 et v_0.

☐ **M17** Si u et v sont géométriques de raisons non nulles différentes, et si $u_0 \neq= 0$ et $v_0 \neq 0$, alors $u \star v$:

$\boxed{\text{A}}$ n'est jamais géométrique
$\boxed{\text{B}}$ peut être géométrique ou non, selon les valeurs respectives de u et v
$\boxed{\text{C}}$ est géométrique

☐ **M18** Si u et v sont géométriques de raisons non nulles différentes, et si $u_0 \neq 0$ et $v_0 \neq 0$, alors $u \star v$:

$\boxed{\text{A}}$ est la somme de deux suites géométriques
$\boxed{\text{B}}$ peut être la somme de deux suites géométriques ou non, selon les valeurs respectives de u et v
$\boxed{\text{C}}$ n'est jamais la somme de deux suites géométriques

◯ **R1** Justifier votre réponse à la question **M18**.

☐ **M19** Si u et v sont géométriques et de raisons différentes de 0 et 1, alors $u \star v$:

A peut être arithmétique ou non, selon les valeurs respectives de u et v
B est arithmétique
C n'est jamais arithmétique

Valuation, résolution d'équations

Soit u une suite réelle différente de $\tilde{0}$. Il existe donc un entier $n \geqslant 0$ tel que $u_n \neq 0$, et on note $\alpha(u)$ le plus petit de ces entiers, appelé **valuation** de u. Par exemple, pour une suite u vérifiant $u_0 = 0, u_1 = 0, u_2 = -4$ et $u_3 = 9$, on a $\alpha(u) = 2$.

☐ **M20** Soit u et v deux suites réelles différentes de $\tilde{0}$. On note p la valuation de u, et q celle de v. On note m le plus petit des entiers p et q, et Mle plus grand d'entre eux. On peut alors affirmer :

A qu'aucune des autres affirmations n'est systématiquement vraie
B que $(u \star v)_n = 0$ pour tout entier naturel $n < pq$, mais que $(u \star v)_{pq} \neq 0$
C que $(u \star v)n = 0$ pour tout entier naturel $n < p+q$, mais que $(u \star v)_{p+q} \neq 0$
D que $(u \star v)_n = 0$ pour tout entier naturel $n < m$, mais que $(u \star v)_m \neq 0$
E que $(u \star v)n = 0$ pour tout entier naturel $n < M$, mais que $(u \star v)_M \neq 0$

☐ **M21** Soit u et v deux suites différentes de la suite nulle. On peut alors affirmer :

A que $u \star v$ n'est pas la suite nulle, et que sa valuation est le plus petit des entiers $\alpha(u)$ et $\alpha(v)$
B que $u \star v$ n'est pas la suite nulle, et que sa valuation est $\alpha(u) + \alpha(v)$
C qu'aucune des autres affirmations n'est systématiquement vraie
D que $u \star v$ n'est pas la suite nulle, et que sa valuation est le plus grand des entiers $\alpha(u)$ et $\alpha(v)$
E que $u \star v$ n'est pas la suite nulle, et que sa valuation est $\alpha(u)\alpha(v)$

☐ **M22** Soit b une suite réelle. S'il existe une suite réelle u telle que $u \star b = e$, alors la conséquence la plus précise que l'on puisse en tirer est :

A aucune des autres affirmations n'est vraie en toute généralité
B $b_1 \neq 0$
C $b_n \neq 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$
D il existe un $n \in \mathbb{N}$ tel que $b_n \neq 0$
E $b_0 \neq 0$

☐ **M23** On fixe deux suites réelles b et c telles que $b \neq 0$.
L'affirmation la plus précise que l'on puisse soutenir est :

A il n'existe aucune suite réelle u telle que $u \star b = c$
B aucune des autres affirmations ne peut être soutenue
C il existe une et une seule suite réelle u telle que $u \star b = c$
D il existe plusieurs suites réelles u telles que $u \star b = c$
E il existe au moins une suite réelle u telle que $u \star b = c$

◯ **R2** Justifier votre réponse à la question **M23**.

☐ **M24** Soit b une suite réelle non nulle. S'il existe une suite réelle u telle que $u \star u = b$, alors :

A on peut affirmer que la valuation de u est paire
B on peut affirmer que la valuation de b est paire

C on peut affirmer que la valuation de b est impaire
D aucune des autres affirmations ne peut être soutenue
E on peut affirmer que la valuation de u est impaire

☐ **M25** Soit b une suite réelle telle que $b_0 > 0$. On peut alors affirmer :

A qu'il existe exactement deux suites réelles u telles que $u \star u = b$
B qu'il existe exactement une suite réelle u telle que $u \star u = b$
C qu'aucune des autres affirmations ne peut être soutenue
D qu'il existe une infinité de suites réelles u telles que $u \star u = b$
E qu'il n'existe aucune suite réelle u telle que $u \star u = b$

Exercice 3. Arithmétique

△ **L4** Parmi les entiers suivants, indiquer lesquels sont premiers

$$1, \quad 2, \quad 43, \quad 59, \quad 111, \quad 143, \quad 147, \quad 187$$

☐ **M26** Le pgcd de 720 et 210 est :

A 60 | B 30 | C 90 | D 15 | E 105

☐ **M27** le nombre 66 est premier avec

A 45 | B 111 | C 35 | D 143 | E 105

☐ **M28** Le dernier chiffre de $2\,023^{2\,024}$ est :

A 2 | B 1 | C 7 | D 9 | E 3

☐ **M29** On rappelle que $10! = 2 \times 3 \times \ldots \times 9 \times 10$. On considère les nombres $2 + 10!, \ldots, 9 + 10!$. Parmi ces nombres, combien sont premiers ?

A Aucun | B Un | C Tous | D Trois | Deux

☐ **M30** Le pgcd des nombres $2.10! + 1$ et $3.10! + 1$ est :

A aucune des autres réponses | B 1 | C 5 | D 3 | E 7

◯ **R3** justifier votre réponse à la question **M30**.

☐ **M31** Vrai ou Faux ?
Tout entier $a \geqslant 4$ est de la forme $3k + 1$ ou $3k + 2$, où k est un entier naturel.

A Vrai | B Faux

☐ **M32** Vrai ou Faux ?
Tout entier impair $a \geqslant 1$ est de la forme $4k + 1$ ou $4k + 3$, où k est un entier naturel.

A Vrai | B Faux

☐ **M33** Vrai ou Faux ?
Pour tout entier impair $a \geqslant 1$, le nombre $a^2 - 1$ est divisible par 8.

A Vrai B Faux

☐ **M34** Vrai ou Faux?
Pour tout entier $a \geqslant 5$ non divisible par 3, le nombre $a^2 - 1$ est divisible par 24.

A Vrai B Faux

☐ **M35** Combien y a-t-il de nombres premiers p tels que $p-2$ et $p+2$ soient premiers?

A 0 B une infinité C 4 D 2 E 1

Exercice 4. Nombres complexes et trigonométrie

☐ **M36** Soit z un nombre complexe. À partir de l'hypothèse qu'il existe un nombre réel x tel que $z = x\overline{z}$, la conséquence la plus précise que l'on puisse en tirer est :

A z est imaginaire pur
B l'un des nombres z ou iz est réel
C aucune des autres réponses proposées
D z est un nombre réel
E z est de module 1

☐ **M37** Soit a et b deux nombres réels non nuls, et n un entier naturel non nul. L'affirmation la plus précise que l'on puisse soutenir est :

A $(a+\mathrm{i}b)^n + (a-\mathrm{i}b)^n$ est réel négatif
B $(a+\mathrm{i}b)^n + (a-\mathrm{i}b)^n$ est imaginaire pur
C aucune des autres affirmations ne peut être soutenue
D $(a+\mathrm{i}b)^n + (a-\mathrm{i}b)^n$ est réel positif
E $(a+\mathrm{i}b)^n + (a-\mathrm{i}b)^n$ est réel

☐ **M38** Soit a et b deux nombres réels non nuls, et n un entier naturel non nul. L'affirmation la plus précise que l'on puisse soutenir est :

A $(a+\mathrm{i}b)^n - (a-\mathrm{i}b)^n$ est réel
B $(a+\mathrm{i}b)^n - (a-\mathrm{i}b)^n$ est réel positif
C aucune des autres affirmations ne peut être soutenue
D $(a+\mathrm{i}b)^n - (a-\mathrm{i}b)^n$ est réel négatif
E $(a+\mathrm{i}b)^n - (a-\mathrm{i}b)^n$ est imaginaire pur

☐ **M39** Soit n un entier naturel non nul. Le nombre complexe $(1+\mathrm{i})^n + (1-\mathrm{i})^n$ est systématiquement égal à :

A 2^n B $\left(\sqrt{2}\right)^n \cos\dfrac{n\pi}{4}$ C $2^n \cos\dfrac{n\pi}{4}$ D $2\left(\sqrt{2}\right)^n \cos\dfrac{n\pi}{4}$ E $2^{n+1} \cos\dfrac{n\pi}{4}$

☐ **M40** Soit n un entier naturel non nul. La somme

$$\binom{2n}{0} - \binom{2n}{2} + \ldots + (-1)^p \binom{2n}{2p} + \ldots + (-1)^n \binom{2n}{2bn}$$

est égale à :

A $2^n \cos \dfrac{n\pi}{2}$ B $\left(\sqrt{2}\right)^{n+2} \cos \dfrac{n\pi}{4}$ C 2^{2n-1} D $\left(\sqrt{2}\right)^{n} \cos \dfrac{n\pi}{4}$ E $2^{n+1} \cos \dfrac{n\pi}{2}$

☐ **M41** L'ensemble des valeurs prises par $\left|\mathrm{e}^{\mathrm{i}t} - 1\right|$ lorsque t varie dans $\left]0\,;\,\dfrac{\pi}{2}\right[$ est :

A $]-\sqrt{2}\,;\,\sqrt{2}[$ B $]0\,;\,\sqrt{2}[$ C $]0;1[$ D $[0;1]$ E $[0\,;\,\sqrt{2}]$

☐ **M42** Les complexes z tels que $z^{10} = 1$ et $\mathrm{Im}(z) \geqslant 0$ sont au nombre de :

A 4 B 2 C 6 D 5 E 10

Exercice 5. Systèmes de Steiner

On définit la terminologie suivante :

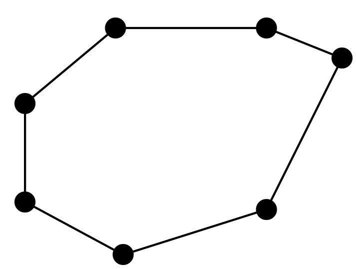
- Une **paire** d'un ensemble E est un sous-ensemble de E possédant exactement deux éléments. Par exemple, les ensembles $\{1\,;\,3\}$ et $\{2\,;\,4\}$ sont des paires de l'ensemble $\{1\,;\,2\,;\,3\,;\,4\,;\,5\}$.

  On rappelle que les ensembles $\{3\,;\,1\}$ et $\{1\,;\,3\}$ sont identiques puisqu'ils ont les mêmes éléments.
- Un **triplet** d'un ensemble E est un sous-ensemble de E possédant exactement trois éléments. Par exemple $\{1\,;\,2\,;\,4\}$ est un triplet de $\{1\,;\,2\,;\,3\,;\,4\,;\,5\}$, égal au triplet $\{4\,;\,2\,;\,1\}$, au triplet $\{1\,;\,4\,;\,2\}$ etc.
- Une paire est dite **incluse** dans un triplet lorsque tout élément de la paire est aussi un élément du triplet. Par exemple $\{1\,;\,4\}$ est incluse dans $\{1\,;\,2\,;\,4\}$ (les éléments 1 et 4 sont tous deux dans $\{1\,;\,2\,;\,4\}$), mais $\{1\,;\,5\}$ n'est pas incluse dans $\{1\,;\,2\,;\,4\}$ car 5 appartient à $\{1\,;\,5\}$ mais pas à $\{1\,;\,2\,;\,4\}$. Dans tout l'exercice, on note E_n l'ensemble des entiers naturels compris entre 1 et n, autrement dit

$$E_n = \{1\,;\,2\,;\,\ldots\,;\,n\}.$$

Un peu de dénombrement

Dans les questions **M43**, **M44** et **M45**, on considère les 7 sommets d'un heptagone convexe.



☐ **M43** Le nombre de paires de sommets de l'heptagone est :

A 14 B aucune des autres réponses proposées C 21 D 42 E 13

☐ **M44** Le nombre de paires de sommets de l'heptagone qui ne sont pas côte-à-côte est :

A aucune des autres réponses proposées   B 11   C 28   D 12   E 14

☐ **M45** Le nombre total de triangles que l'on peut former sur des sommets de l'heptagone et qui n'ont pas de côté commun avec l'heptagone est :

A 7   B aucune des autres réponses proposées   C 2   D 21   E 3

☐ **M45** Soit un entier naturel $n \geqslant 3$. Le nombre de paires de E_n et le nombre de triplets de E_n sont respectivement égaux à :

A $\dfrac{n(n-1)}{2}$ et $\dfrac{n(n-1)(n-2)}{6}$

B $\dfrac{n(n+1)}{2}$ et $\dfrac{n(n+1)(n+2)}{6}$

C $\dfrac{n(n-1)}{2}$ et $\dfrac{n(n-1)(n-2)}{3}$

D $\dfrac{n(n+1)}{2}$ et $\dfrac{n(n+1)(n+2)}{3}$

E 2^{n-1} et 2^{n-2}

△ **L5** Donner tous les entiers $n \geqslant 3$ tels que E_n ait autant de paires que de triplets.

Introduction aux systèmes de Steiner

On considère dans la suite un ensemble fini E. Un système de Steiner sur E est un ensemble T tel que :

(i) Les éléments de T sont des triplets de E.

(ii) Toute paire $\{i\ ;\ j\}$ de E est incluse dans un et un seul élément de T.

Par exemple, pour $E = \{1\ ;\ 2\ ;\ 3\}$:

- l'ensemble T formé de $\{1\ ;\ 2\ ;\ 3\}$ et $\{1\ ;\ 2\}$ n'est pas un système de Steiner car il n'est pas exclusivement constitué de triplets (l'objet $\{1\ ;\ 2\}$ de T n'est pas un triplet) ;
- l'ensemble T formé du seul triplet $\{1\ ;\ 2\ ;\ 3\}$ est bien un système de Steiner. En effet, $\{1\ ;\ 2\ ;\ 3\}$ est bien un triplet, et toute paire de $\{1\ ;\ 2\ ;\ 3\}$ est incluse dans $\{1\ ;\ 2\ ;\ 3\}$, qui est le seul élément de T.

Autre exemple, sur $E_4 = \{1\ ;\ 2\ ;\ 3\ ;\ 4\}$, l'ensemble T formé des quatre triplets $\{1\ ;\ 2\ ;\ 3\}, \{1\ ;\ 2\ ;\ 4\}, \{2\ ;\ 3\ ;\ 4\}$ et $\{1\ ;\ 3\ ;\ 4\}$ n'est pas un système de Steiner : bien que toute paire de E_4 soit incluse dans l'un de ses éléments (ce que l'on vérifie facilement), la paire $\{1\ ;\ 2\}$ est incluse dans plusieurs éléments de T.

☐ **M47** Sur E_4, l'ensemble T formé du seul triplet $\{1\ ;\ 2\ ;\ 3\}$:

A n'est pas un système de Steiner car au moins une paire de E_4 n'est incluse dans aucun élément de T

B n'est pas un système de Steiner car T n'est pas constitué uniquement de triplets

C n'est pas un système de Steiner car au moins une paire de E_4 est incluse dans plusieurs éléments de T

D est un système de Steiner

E n'est pas un système de Steiner car n'importe quelle paire de E_4 est incluse dans plusieurs éléments de T

☐ **M48** Sur E_4, l'ensemble T formé des triplets $\{1\ ;\ 2\ ;\ 3\}, \{1\ ;\ 2\ ;\ 4\}$ et $\{2\ ;\ 3\ ;\ 4\}$:

A n'est pas un système de Steiner car au moins une paire de E_4 est incluse dans plusieurs éléments de T
B n'est pas un système de Steiner car n'importe quelle paire de E_4 est incluse dans plusieurs éléments de T
C n'est pas un système de Steiner car T n'est pas constitué uniquement de triplets
D est un système de Steiner
E n'est pas un système de Steiner car au moins une paire de E_4 n'est incluse dans aucun élément de T

Vrai ou faux?

☐ **M49** Il existe un et un seul système de Steiner sur E_3.

A Faux B Vrai

☐ **M50** Il existe un système de Steiner sur E_4.

A Vrai B Faux

☐ **M51** Il existe un système de Steiner sur E_5.

A Faux B Vrai

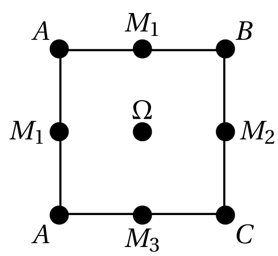
◯ **R4** Justifier votre réponse à la question **M51**.

☐ **M52** Pour obtenir un système de Steiner sur E_7, quels triplets adjoindre aux triplets $\{1 ; 2 ; 3\}, \{1 ; 6 ; 7\}, \{2 ; 4 ; 6\}, \{3 ; 4 ; 7\}$ et $\{3 ; 5 ; 6\}$?

A $\{2 ; 4 ; 5\}$ et $\{1 ; 5 ; 7\}$
B aucune des autres réponses proposées ne convient
C $\{2 ; 5 ; 7\}$ et $\{1 ; 4 ; 5\}$
D $\{2 ; 5 ; 7\}$ et $\{1 ; 5 ; 6\}$
E $\{2 ; 5 ; 6\}$ et $\{1 ; 4 ; 7\}$

Une construction sur un carré

On se place dans un plan euclidien, muni d'un repère orthonormal. On considère un carré représenté par le dessin suivant :



On note E l'ensemble constitué des sommets du carré, des milieux des côtés, et du centre du carré. Ces points sont représentés par des pastilles • sur le dessin.
On forme :

- l'ensemble T_c des triplets constitués de trois points de E alignés sur une droite parallèle à l'un des côtés du carré;
- l'ensemble T_d constitués des deux diagonales $\{A ; \Omega ; C\}$ et $\{B ; \Omega ; D\}$.

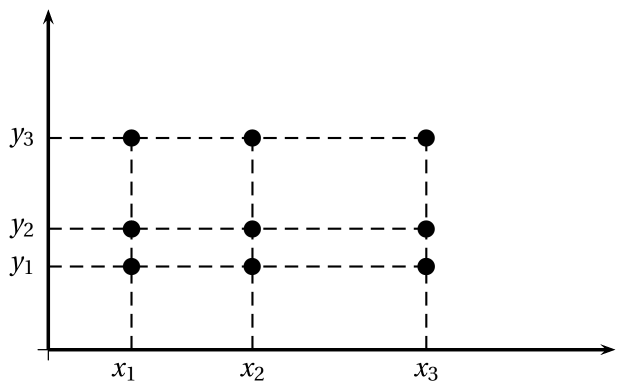
On réunit ces deux ensembles de triplets pour former un ensemble T.

☐ **M53** L'ensemble T n'est pas un système de Steiner sur E parce que :

$\boxed{\text{A}}$ T n'est pas constitué uniquement de triplets
$\boxed{\text{B}}$ aucune paire de E n'est incluse dans au moins un élément de T
$\boxed{\text{C}}$ toutes les paires de E sont incluses dans plusieurs éléments de T
$\boxed{\text{D}}$ au moins une paire de E n'est incluse dans aucun élément de T
$\boxed{\text{E}}$ au moins une paire de E est incluse dans plusieurs éléments de T

△ **L6** Quels triplets rajouter à T pour obtenir un système de Steiner sur E ?
On obtient ainsi plus généralement la construction suivante : étant donné deux triplets $A = \{x_1\ ;\ x_2\ ;\ x_3\}$ et $B = \{y_1\ ;\ y_2\ ;\ y_3\}$ de nombres, on considère l'ensemble E des points du plan dont l'abscisse est dans A, et l'ordonnée dans B. Alors E possède un système de Steiner, et mieux il existe un système de Steiner sur E contenant, entre autres :

- tous les triplets de points de E alignés sur une même droite horizontale ;
- tous les triplets de points de E alignés sur une même droite verticale.



☐ **M54** Ce qui précède permet d'affirmer :

$\boxed{\text{A}}$ qu'aucune des autres affirmations n'est vraie
$\boxed{\text{B}}$ qu'aucun ensemble fini de cardinal 9 ne possède de système de Steiner
$\boxed{\text{C}}$ que tout ensemble fini de cardinal 9 possède un système de Steiner
$\boxed{\text{D}}$ que certains ensembles finis de cardinal 9 possèdent un système de Steiner, mais peut-être pas tous

Une idée séduisante

Pour une certaine valeur de l'entier $n \geqslant 6$, Jean-Pascal cherche à construire un système de Steiner sur E_n. On suppose qu'il a déjà réussi :

- à partager E_n en deux sous-ensembles A et B, tous deux non vides, et sans élément commun ;
- à construire, avec quelque effort, un système de Steiner T sur A et un système de Steiner T' sur B.

Il réunit les deux systèmes, c'est-à-dire qu'il prend tous les triplets qui sont soit dans T soit dans T'. Il obtient ainsi un ensemble $T \cup T'$ de triplets de E_n.

☐ **M55** L'ensemble $T \cup T'$ n'est pas un système de Steiner sur E_n parce que :

$\boxed{\text{A}}$ au moins une paire de E_n est incluse dans plusieurs éléments de $T \cup T'$

$\boxed{\text{B}}$ $T \cup T'$ n'est pas constitué uniquement de triplets
$\boxed{\text{C}}$ au moins une paire de E_n n'est incluse dans aucun élément de $T \cup T'$
$\boxed{\text{D}}$ toutes les paires de E_n sont incluses dans plusieurs éléments de $T \cup T'$

Jean-Pascal a bien compris que sa construction n'est pas suffisante. Il va donc tenter de la modifier, soit en retirant des triplets à $T \cup T'$, soit en rajoutant des triplets à $T \cup T'$.

☐ **M56** Laquelle des affirmations suivantes est vraie ?
$\boxed{\text{A}}$ Il est possible, pour au moins un jeu de données n, A, B, T, T', d'obtenir un système de Steiner sur E_n à partir de $T \cup T'$ en rajoutant certains triplets bien choisis.
$\boxed{\text{B}}$ Il est possible, pour au moins un jeu de données n, A, B, T, T', d'obtenir un système de Steiner sur E_n à partir de $T \cup T'$ en retirant certains triplets bien choisis
$\boxed{\text{C}}$ Aucune des autres réponses n'est correcte

△ **R5** Justifier votre réponse à la question **M56**.

Une autre idée séduisante

Jean-Pascal considère maintenant la situation suivante. Il prend deux entiers naturels $n \geqslant 3$ et $p \geqslant 3$ pour lesquels il a réussi à construire un système de Steiner T_n sur E_n et un système de Steiner T_p sur E_p. Il considère l'ensemble F des points du plan dont l'abscisse x est dans E_n et l'ordonnée y dans E_p. Il espère construire un système de Steiner sur F.

☐ **M57** Si Jean-Pascal parvient à ses fins, il saura qu'il existe un système de Steiner sur E_N pour N égal à :

$\boxed{\text{A}}$ $n + p$ $\boxed{\text{B}}$ np $\boxed{\text{C}}$ n^p $\boxed{\text{D}}$ aucun des autres nombres indiqués, en général $\boxed{\text{E}}$ p^n

Jean-Pascal regroupe alors tous les triplets suivants :

(i) ceux qui sont formés de trois points ayant la même abscisse, et les ordonnées appartiennent à un même triplet du système de Steiner T_p ;
(ii) ceux qui sont formés de trois points ayant la même ordonnée, et les abscisses appartiennent à un même triplet du système de Steiner T_n ;
(iii) enfin, pour chaque triplet A dans T_n et chaque triplet B dans T_p, il prend tous les triplets d'un système de Steiner décrit à partir de A et B entre les questions **L6** et **M54**.
Il forme ainsi un ensemble de triplets qu'il note T. Jean-Pascal prétend alors que T est un système de Steiner sur F.
Voici son raisonnement :

> Soit $\{M,\ N\}$ une paire de F.
> Étape 1 : les points M et N sont différents, donc leurs coordonnées respectives $(x\ ;\ y)$ et $(x'\ ;\ y')$ vérifient $x = 1 - x'$ et $y = 1 - y'$.
> Étape 2 : Puisque $\{x\ ;\ x'\}$ est une paire de E_n, on la rentre dans un unique triplet A du système T_n.
> Étape 3 : Puisque $\{y\ ;\ y'\}$ est une paire de E_p, on la rentre dans un unique triplet B du système T_p.
> Étape 4 : La paire $\{M\ ;\ N\}$ est alors incluse dans un unique triplet construit à partir de A et B (point (iii) ci-dessus).
> Étape 5 : La paire $\{M\ ;\ N\}$ est alors incluse dans un unique élément du système T.

Chacune de ces étapes, *en admettant la validité des précédentes*, est soit juste, soit fausse, soit incomplète car l'affirmation ne découle pas de manière immédiate de la situation (il manque une justification).

☐ **M58** L'étape 1 est :

A juste B fausse C incomplète

☐ **M59** En admettant la validité des étapes précédentes, l'étape 2 est :

A incomplète B juste C fausse

☐ **M60** En admettant la validité des étapes précédentes, l'étape 3 est :

A incomplète B fausse C juste

☐ **M61** En admettant la validité des étapes précédentes, l'étape 4 est :

A incomplète B juste C fausse

☐ **M62** En admettant la validité des étapes précédentes, l'étape 5 est :

A juste B incomplète C fausse

Une question de cardinal

On suppose dans cette partie que E_n possède un système de Steiner

☐ **M63** Le nombre de paires de E_n qui contiennent 1 et le nombre de triplets dans T qui contiennent 1 sont respectivement égaux à :

A aucune des autres réponses proposées, en général B n et $\dfrac{n(n-1)}{2}$ C $n-1$ et $\dfrac{n+1}{3}$

D $n-1$ et $\dfrac{n+2}{3}$ E $n-1$ et $\dfrac{n-1}{2}$

☐ **M64** Le nombre de triplets qui composent le système de Steiner T vaut :

A $\dfrac{n+2}{3}$ B $\dfrac{n-1}{2}$ C $\dfrac{n+1}{2}$ D $\dfrac{n(n-1)}{6}$ E $n-1$

△ **L7** Donner, au vu de ce qui précède, les restes possibles dans la division euclidienne de n par 3.

☐ **M65** Les restes possibles dans la division euclidienne de n par 6 sont :

A 1 et 3 B 0, 1 et 3 C 1, 3 et 5 D 1, 2 et 3 E 1, 3 et 4

☐ **M66** On peut affirmer que tout diviseur premier de n est congru modulo 6 à :

A 1, 3 ou 0 B 1, 3 ou -1 C 1, -1, ou 0 D -1 ou 3 E 1 ou 3

☐ **M67** Au vu du reste de l'exercice, quel est le plus grand des nombres p suivants pour lequel la question de l'existence d'un système de Steiner sur E_p reste en suspens ?

A 49 B 15 C 21 D 62 E 25