☙ Évaluation ESciA session 19 mars 2022 ❧

Mathématiques expertes Épreuve 2 , option B

Durée : 1h 30 min

FONCTIONNEMENT DES QUESTIONS

- Les questions à *choix multiples* sont numérotées M1, M2 etc. Le candidat y répond en **noircissant** la case correspondant à sa réponse dans la feuille-réponse □.
Pour chacune de ces questions, il y a une et une seule bonne réponse.
Toute réponse fausse retire des points aux candidats.
Noircir plusieurs réponses à une même question a un effet de neutralisation (le candidat récoltera 0 point).
- Les questions *à réponse brute* sont numérotées L1, L2, etc.
Elles ne demandent aucune justification : les résultats sont reportés par le candidat dans le cadre correspondant sur la feuille-réponse △. Tout débordement de cadre est interdit.
- Les questions *à réponse rédigée* sont numérotées RI, R2, etc. Elles sont écrites dans le cadre correspondant sur la feuille-réponse ◯ ou la feuille-réponse △, selon le symbole précédant le numéro de la question. Tout débordement de cadre est interdit.

CONSEILS DE BON SENS

- L'énoncé est (très) long : il n'est absolument pas nécessaire d'avoir tout traité pour avoir une note et un classement excellents.
- Ne vous précipitez pas pour reporter vos réponses, notamment aux questions à choix multiples. Il est préférable d'avoir terminé un exercice avant d'en reporter les réponses.
- Ne répondez jamais au hasard à une question à choix multiples !
- Selon l'exercice, les questions peuvent être dépendantes les unes des autres ou non. Soyez attentifs à la variété des situations.

Exercice 1. Nombres réels

☐ **M1** L'ensemble des solutions réelles de l'inéquation $\dfrac{2}{x-1} < \dfrac{4}{x-1} + 2$ est :

$\boxed{\text{A}}$ $]0\,;\,+\infty[$
$\boxed{\text{B}}$ aucune des autres réponses proposées
$\boxed{\text{C}}$ $]1\,;\,+\infty[$
$\boxed{\text{D}}$ $]2\,;\,+\infty[$
$\boxed{\text{E}}$ $]-\infty\,;\,0[\cup]1\,;\,+\infty[$

☐ **M2** Pour que l'équation $\mathrm{e}^{2x} - \mathrm{e}^{x} = m$ possède exactement deux solutions, il faut et il suffit que m appartienne à :

$\boxed{\text{A}}$ $]-\frac{1}{4}\,;\,0[$ $\boxed{\text{B}}$ $]-\frac{1}{4}\,;\,0]$ $\boxed{\text{C}}$ $]-\frac{1}{4}\,;\,1]$ $\boxed{\text{D}}$ $[-\frac{1}{4}\,;\,1]$ $\boxed{\text{E}}$ $[-\frac{1}{4}\,;\,+\infty[$

☐ **M3** Le nombre de solutions de l'équation $\ln\left(x - \sqrt{x} - 1\right) = 2$ d'inconnue x réelle est égal à :

$\boxed{\text{A}}$ 1 $\boxed{\text{B}}$ 0 $\boxed{\text{C}}$ 3 $\boxed{\text{D}}$ 4 $\boxed{\text{E}}$ 2

☐ **M4** Pour deux réels x et y, la condition $|x+y| = ||x|-|y||$ est équivalente à la condition :

$\boxed{\text{A}}$ $xy \geqslant 0$
$\boxed{\text{B}}$ $xy \leqslant 0$
$\boxed{\text{C}}$ $x \geqslant 0$ et $y \geqslant 0$
$\boxed{\text{D}}$ aucune des conditions citées
$\boxed{\text{E}}$ $x \leqslant 0$ et $y \geqslant 0$

△ **L1** Donner deux entiers a et b tels que $\dfrac{3+\sqrt{2}}{\sqrt{2}+1} = a + b\sqrt{2}$.

△ **L2** Donner, pour x réel positif, une expression simplifiée de $A(x) = \sqrt{x+1+2\sqrt{x}} + \sqrt{x+1-2\sqrt{x}}$.

△ **L3** Donner sans justification les solutions de l'équation $3|2-x| + 2|5-x| = 7$.

◯ **R1** Pour un nombre réel x, on note $E(x)$ l'unique entier relatif k tel que $k \leqslant x < k+1$.
Soit n et p des entiers relatifs. Montrer que

$$E\left(\frac{n+p}{2}\right) + E\left(\frac{n-p+1}{2}\right) = n.$$

Exercice 2. Généralités sur les suites

☐ **M5** Soit a et b deux nombres réels. On suppose que $a < b + \dfrac{1}{n}$ pour tout entier $n \geqslant 1$. Alors :

$\boxed{\text{A}}$ $a \leqslant b$ $\quad$ $\boxed{\text{B}}$ $a < b$ $\quad$ $\boxed{\text{C}}$ $a = 0$ $\quad$ $\boxed{\text{D}}$ On ne peut rien dire $\quad$ $\boxed{\text{E}}$ $a = b$

△ **L4** Donner, sans justification, un exemple de suite bornée qui est divergente.

△ **L5** Donner, sans justification, la limite de la suite $\left(\dfrac{\cos(n)}{n}\right)_n$.

Vrai ou Faux ?

☐ **M6** Si une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante et la suite $[(u_n)]^2_{n\in\mathbb{N}}$ est majorée, alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.

$\boxed{\text{A}}$ Faux $\quad$ $\boxed{\text{B}}$ Vrai

☐ **M7** Faux Si une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_{n+1} - u_n = 0$

$\boxed{\text{A}}$ Faux $\quad$ $\boxed{\text{B}}$ Vrai

☐ **M8** Si une suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers $+\infty$, alors $u_{n+1} - u_n \geqslant 0$ à partir d'un certain rang.

$\boxed{\text{A}}$ Faux $\quad$ $\boxed{\text{B}}$ Vrai

☐ **M9** Si une suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers $+\infty$, alors il existe une infinité d'entiers n tels que $u_{n+1} > u_n$.

$\boxed{\text{A}}$ Faux $\quad$ $\boxed{\text{B}}$ Vrai

◯ **R2** Justifier votre réponse à la question **M9** .

Exercice 3. Étude d'une suite

On considère dans cet exercice la suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ définie par les conditions :

- $u_1 = 1$;
- $u_{n+1} = \sqrt{2\left(1+\dfrac{1}{n}\right)}u_n$ pour tout entier naturel n.

☐ **M10** La suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$

$\boxed{\text{A}}$ est croissante $\boxed{\text{B}}$ n'est ni croissante ni décroissante $\boxed{\text{C}}$ est décroissante

☐ **M11** L'affirmation « quand n tend vers $+\infty$, u_n est géométrique » :

$\boxed{\text{A}}$ est vraie $\boxed{\text{B}}$ est fausse $\boxed{\text{C}}$ est dénuée de sens

☐ **M12** L'affirmation « $\lim\limits_{n\to+\infty} u_{n+1} = \sqrt{2}u_n$ » :

$\boxed{\text{A}}$ est vraie $\boxed{\text{B}}$ est fausse $\boxed{\text{C}}$ est dénuée de sens

☐ **M13** Laquelle des affirmations suivantes est vraie?

$\boxed{\text{A}}$ $u_{n+1} \leqslant \left(\sqrt{2}\right)^n$ pour tout entier naturel $n \geqslant 1$
$\boxed{\text{B}}$ $\left(\sqrt{2}\right)^n \leqslant u_n \leqslant 2^n$ pour tout entier naturel $n \geqslant 1$
$\boxed{\text{C}}$ $\left(\sqrt{2}\right)^n \leqslant u_{n+1} \leqslant 2^n$ pour tout entier naturel $n \geqslant 0$
$\boxed{\text{D}}$ $u_{n+1} \geqslant 2^n$ pour tout entier naturel $n \geqslant 0$
$\boxed{\text{E}}$ Aucune des autres affirmations n'est vraie

☐ **M14** Laquelle des affirmations suivantes est vraie?

$\boxed{\text{A}}$ La suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ ne converge pas et ne tend pas vers $+\infty$
$\boxed{\text{B}}$ $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 1$
$\boxed{\text{C}}$ $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$
$\boxed{\text{D}}$ $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \sqrt{2}$
$\boxed{\text{E}}$ La suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ a une limite qui n'est pas l'une des valeurs proposées dans les autres réponses

☐ **M15** Laquelle des affirmations suivantes est vraie?

$\boxed{\text{A}}$ La suite $\left(\dfrac{(u_n)^2}{n}\right)_{n\geqslant 1}$ est géométrique
$\boxed{\text{B}}$ La suite $\left(n\,(u_n)^2\right)_{n\geqslant 1}$ est géométrique
$\boxed{\text{C}}$ La suite $\left(\dfrac{(u_n)^2}{n^2}\right)_{n\geqslant 1}$ est géométrique
$\boxed{\text{D}}$ La suite $\left(\left(1+\dfrac{1}{n}\right)(u_n)^2\right)_{n\geqslant 1}$ est géométrique
$\boxed{\text{E}}$ La suite $\left((u_n)^2\right)_{n\geqslant 1}$ est géométrique

☐ **M16** Pour tout entier $n \geqslant 1$, le terme u_n vaut :

$\boxed{\text{A}}$ $n\sqrt{2^n}$ $\boxed{\text{B}}$ $n\sqrt{2^{n-1}}$ $\boxed{\text{C}}$ $\sqrt{n2^{n-1}}$ $\boxed{\text{D}}$ $\sqrt{\left(1+\dfrac{1}{n}\right)2^n}$ $\boxed{\text{E}}$ $\sqrt{n2^n}$

△ **L6** Donner sans justification la limite de $\dfrac{u_n}{\left(\sqrt{2}\right)^2}$ quand n tend vers $+\infty$.

Exercice 4. Mots

Dans cet exercice, on appelle *mot* toute suite finie de 0 et de 1 contenant au moins un chiffre.
Par exemple, 11010, 001011 et 00 sont des mots.
La longueur d'un mot est alors le nombre de chiffres le constituant : les mots précédents sont de longueurs respectives 5, 6 et 2.
Si u et v sont deux mots, on note $u-v$ le mot obtenu en juxtaposant à la suite de u les chiffres du mot v.
Par exemple, si $u = 1101$ et $v = 10001$, alors $u - v = 110110001$.
Si u est un mot, on note $\hat{u}$ le mot obtenu en inversant l'ordre des chiffres de u.
Par exemple, si $u = 1100101$, alors $\hat{u} = 1010011$.
On dit qu'un mot u est un *palindrome* lorsque $u = \hat{u}$.
Par exemple, le mot 1101011 est un *palindrome*.

Exemples

Dans les questions ☐ **M17** à ☐ **M19** , on prend $u = 0101$ et $v = 101101$.

☐ **M17** Vrai ou faux ? Le mot u est un palindrome.

$\boxed{\text{A}}$ Vrai $\boxed{\text{B}}$ Faux

☐ **M18** Vrai ou faux ? Le mot v est un palindrome.

$\boxed{\text{A}}$ Faux $\boxed{\text{B}}$ Vrai

△ **L7** Écrire le mot $u - v$.

☐ **M19** Vrai ou faux ? Le mot $u - v$ est un palindrome.

$\boxed{\text{A}}$ Faux $\boxed{\text{B}}$ Vrai

☐ **M20** Soit u et v deux mots. Le mot $\widehat{u-v}$ est systématiquement égal à :

$\boxed{\text{A}}$ $\hat{v}-\hat{u}$ $\boxed{\text{B}}$ $\hat{u}-\hat{v}$ $\boxed{\text{C}}$ $v-\hat{u}$ $\boxed{\text{D}}$ $\hat{u}-v$ $\boxed{\text{E}}$ $\hat{v}-u$

☐ **M21** Soit u un *palindrome*. La propriété « le mot $u - u$ est un palindrome » est :

$\boxed{\text{A}}$ toujours vraie
$\boxed{\text{B}}$ toujours fausse
$\boxed{\text{C}}$ vraie pour certains palindromes u mais pas tous

☐ **M22** Soit u et v deux *palindromes*. La propriété « le mot $u - v$ est un » est un palindrome :

$\boxed{\text{A}}$ vraie pour certains palindromes u et v mais pas tous
$\boxed{\text{B}}$ toujours fausse
$\boxed{\text{C}}$ toujours vraie

☐ **M23** La propriété « le mot $u - v - u$ est un palindrome » est :

$\boxed{\text{A}}$ vraie pour certains palindromes u et v mais pas tous
$\boxed{\text{B}}$ vraie pour n'importe quels mots u et v
$\boxed{\text{C}}$ fausse lorsque u et v sont des palindromes, mais vraie pour certains autres mots u et v qui ne sont pas des palindromes
$\boxed{\text{D}}$ vraie lorsque u et v sont des palindromes, et uniquement dans ce cas

E vraie lorsque u et v sont des palindromes, mais aussi pour certains mots u et v qui ne sont pas des palindromes

Anti-mots

Étant donné un mot u, on note $\overline{u}$ le mot obtenu en remplaçant tous les « 1 » de u par des « 0 », et tous les « 0 » de u par des « 1 ».
Par exemple, si $u = 1100101$, alors $\overline{u} = 0011010$.
On dit qu'un mot u est un anti-mot lorsque $\hat{u} = \overline{u}$.
Par exemple :

- le mot $u = 001011$ est un anti-mot car $\hat{u} = 110100$ et $\overline{u} = 110100$, et ainsi $\hat{u} = \overline{u}$;
- le mot $u = 001101$ n'est pas un anti-mot car $\hat{u} = 101100$ et $\overline{u} = 110010$, et ainsi $\hat{u} \neq \overline{u}$.

☐ **M24** Lequel des mots suivants est un anti-mot ?

A 1011100 B 011 C 101010 D 1001 E 1

☐ **M25** Laquelle des affirmations suivantes est correcte ?

A Aucun mot u ne vérifie $\overline{u} = u$
B Tous les mots u vérifient $\overline{u} = u$
C Certains mots u vérifient $\overline{u} = u$, mais pas tous

☐ **M26** Laquelle des affirmations suivantes est correcte ?

A Certains palindromes sont des anti-mots, mais pas tous
B Aucun palindrome n'est un anti-mot
C Tous les palindromes sont des anti-mots

☐ **M27** La propriété « $\overline{u}$ est un palindrome » est :

A vraie lorsque u est un palindrome, mais aussi pour certains mots u qui ne sont pas des palindromes
B vraie pour n'importe quel mot u
C vraie lorsque u est un palindrome, et uniquement dans ce cas
D fausse lorsque u est un palindrome, mais vraie pour certains mots u qui ne sont pas des palindromes
E vraie pour certains palindromes u mais pas tous

☐ **M28** Laquelle des affirmations suivantes est correcte ?

A Si u est un anti-mot, alors les mots $\overline{u}$ et $\hat{u}$ peuvent être des anti-mots, mais il y a des exemples d'anti-mots u pour lesquels ce n'est pas le cas
B Si u est un anti-mot, alors les mots $\overline{u}$ et $\hat{u}$ ne sont pas des anti-mots
C Si u est un anti-mot, alors les mots $\overline{u}$ et $\hat{u}$ sont nécessairement des anti-mots

◯ **R3** Soit u un mot de longueur *paire*. Démontrer que u est un anti-mot si et seulement s'il existe un mot v tel que $u = v - \hat{\overline{v}}$.

Nombre de 1

Étant donné un mot u de longueur n ainsi qu'un entier k compris entre 1 et n, on note $s_k(u)$ le nombre d'occurrences du chiffre 1 parmi les k premiers chiffres de u. Par convention, si $k = 0$, on pose $s_0(u) = 0$.
Par exemple, pour le mot $u = 11010$:

- On a $s_0(u) = 0$ par convention ;
- Le premier chiffre de u est 1, donc $s_1(u) = 1$;
- Les deux premiers chiffres de u sont 1, 1, donc $s_2(u) = 2$;
- Les trois premiers chiffres de u sont 1, 1, 0, donc $s_3(u) = 2$;
- Les quatre premiers chiffres de u sont 1, 1, 0, 1, donc $s_4(u) = 3$;
- Les cinq premiers chiffres de u sont 1, 1, 0, 1, 0, donc $s_5(u) = 3$.

☐ **M29** Le nombre $s_4(00101111)$ vaut :

$\boxed{\text{A}}$ 1 $\boxed{\text{B}}$ 2 $\boxed{\text{C}}$ 4 $\boxed{\text{D}}$ 0 $\boxed{\text{E}}$ 5

☐ **M30** Soit u un mot de longueur n. Si k est un entier compris entre 1 et n, alors le k-ième chiffre du mot u vaut :

$\boxed{\text{A}}$ $s_k(u)$ $\boxed{\text{B}}$ $s_{k-1}(u)$ $\boxed{\text{C}}$ $s_{k+1}(u)$ $\boxed{\text{D}}$ $s_{k+1}(u) - s_k(u)$ $\boxed{\text{E}}$ $s_k(u) - s_{k-1}(u)$

☐ **M31** Soit u et v deux mots de même longueur n. L'affirmation « si $s_k(u) = s_k(v)$ pour tout entier k compris entre 1 et n, alors $u = v$ » est :

$\boxed{\text{A}}$ vraie pour certains choix de u, v et n, fausse pour d'autres
$\boxed{\text{B}}$ systématiquement vraie
$\boxed{\text{C}}$ systématiquement fausse

☐ **M32** Soit u un mot de longueur n, et k un entier compris entre 1 et n.
Alors $s_k\left(\overline{u}\right)$ est égal à :

$\boxed{\text{A}}$ $s_n(u) - s_k(u)$ $\boxed{\text{B}}$ $n - s_k(u)$ $\boxed{\text{C}}$ $k - s_k(u)$ $\boxed{\text{D}}$ $k - s_{n-k}(u)$ $\boxed{\text{E}}$ $s_n(u) - s_{n-k}(u)$

☐ **M33** Soit u un mot de longueur n, et k un entier compris entre 1 et n. Alors $s_k(\hat{u})$ est égal à :

$\boxed{\text{A}}$ $k - s_k(u)$
$\boxed{\text{B}}$ $n - s_{n-k}(u)$
$\boxed{\text{C}}$ $k - s_{n-k}(u)$
$\boxed{\text{D}}$ $s_n(u) - s_k(u)$
$\boxed{\text{E}}$ $s_n(u) - s_{n-k}(u)$

Exercice 5. Rationnels et irrationnels

Un nombre réel x est dit **rationnel** lorsqu'il existe des entiers relatifs p et q, avec q non nul, tels que $x = \dfrac{p}{q}$.
Dans le cas contraire x est dit **irrationnel**.
L'ensemble des nombres rationnels est noté $\mathbb{Q}$, l'ensemble des nombres irrationnels est donc $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.
On admettra que π et e (base du logarithme népérien) sont irrationnels, de même que $\sqrt{n}$ pour tout entier $n \geqslant 2$ qui n'est pas le carré d'un entier.

☐ **M34** Parmi les nombres

$$a = \sqrt{5}, \quad b = 1{,}000\,000\,005, \quad c = -4 \quad \text{et} \quad d = \frac{2}{1/3},$$

lesquels sont rationnels ?

$\boxed{\text{A}}$ c et d $\boxed{\text{B}}$ aucun $\boxed{\text{C}}$ Tous $\boxed{\text{D}}$ b, c et d $\boxed{\text{E}}$ b et c

☐ **M35** Vrai ou faux? La somme et le produit de deux nombres rationnels sont toujours rationnels.

$\boxed{\text{A}}$ Faux $\boxed{\text{B}}$ Vrai

☐ **M36** Soit x un rationnel et y un irrationnel. L'affirmation « $x + y$ est irrationnel » est :

$\boxed{\text{A}}$ vraie quel que soit le choix de x et y
$\boxed{\text{B}}$ vraie pour au moins un choix de x et y, fausse pour au moins un autre
$\boxed{\text{C}}$ fausse quel que soit le choix de x et y

△ **R4** Justifiez brièvement votre réponse à la question **M36** .

☐ **M37** Soit x un rationnel et y un irrationnel. L'affirmation « xy est irrationnel » est :

$\boxed{\text{A}}$ vraie pour au moins un choix de x et y,
$\boxed{\text{B}}$ fausse pour au moins un autre
$\boxed{\text{C}}$ fausse quel que soit le choix de x et y
$\boxed{\text{D}}$ vraie quel que soit le choix de x et y

△ **L8** Parmi les nombres

$$a = \sqrt{256},\quad b = \frac{\pi}{6},\quad c = \sin\frac{\pi}{6},\quad d = \sqrt{\text{e}}\quad \text{et} f = \sqrt{3+\sqrt{8}} - \sqrt{2},$$

indiquer sans justification lesquels sont irrationnels.

☐ **M38** Vrai ou faux? La suite $\left(\dfrac{\sqrt{2}}{n}\right)_n$ converge vers 0.

$\boxed{\text{A}}$ Faux $\boxed{\text{B}}$ L'affirmation n'a pas de sens $\boxed{\text{C}}$ Vrai

☐ **M39** Vrai ou faux? Il existe une suite de nombres irrationnels qui converge vers 0.

$\boxed{\text{A}}$ Vrai $\boxed{\text{B}}$ Faux $\boxed{\text{C}}$ L'affirmation n'a pas de sens

☐ **M40** Vrai ou faux? La limite d'une suite convergente de nombres rationnels est toujours un nombre rationnel.

$\boxed{\text{A}}$ Vrai $\boxed{\text{B}}$ Faux

☐ **M41** Soit $x \in [0~;~1[$ donné par son développement décimal illimité $x = 0,x_1x_2x_3\ldots x_n\ldots$ Pour tout entier $n \geqslant 1$, on considère le nombre $u_n = 0,x_1x_2x_3\ldots x_n000000000\ldots$, définissant ainsi une suite u.

$\boxed{\text{A}}$ La suite u converge vers x
$\boxed{\text{B}}$ La suite u tend vers x sauf s'il y a une infinité de 9 parmi les x_n
$\boxed{\text{C}}$ La suite u diverge si x est rationnel
$\boxed{\text{D}}$ La suite u peut converger vers un nombre réel autre que x
$\boxed{\text{E}}$ La suite u diverge si x est irrationnel

☐ **M42** Soit $x \in [0~;~1[$. Alors :

$\boxed{\text{A}}$ x est limite d'une suite de nombre rationnels
$\boxed{\text{B}}$ Les autres propositions n'ont pas de sens
$\boxed{\text{C}}$ x est limite d'une suite de nombres rationnels si et seulement s'il est lui-même rationnel

On note f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ comme suit :

— $f(0) = 0$;

— $f(x) = 1$ pour tout rationnel non nul x;

— $f(x) = 0$ pour tout irrationnel x.

☐ **M43** On considère le raisonnement suivant :

« 0 est limite d'une suite d'irrationnels. Or f est nulle en tout irrationnel. Donc f est continue en 0. »
Ce raisonnement est :

A correct B incorrect

△ **R5** Justifiez votre réponse à la question **M43** .

☐ **M44** Laquelle des propositions suivantes est vraie?

A La fonction f est continue
B La fonction f est continue en tout point de $\mathbb{Q}$, et seulement en ces points
C La fonction f est continue en 0, et seulement en 0
[Q] La fonction f est continue en tout point de $\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$, et seulement en ces points
D Aucune des autres affirmations proposées n'est vraie

☐ **M45** On note g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = xf(x)$.
Laquelle des propositions suivantes est vraie?

A La fonction g est continue en tout point de $\mathbb{Q}$, et seulement en ces points
B La fonction g est continue en tout point de $\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$, et seulement en ces points
C La fonction g est continue en 0, et seulement en 0
D La fonction g est continue
E Aucune des autres affirmations proposées n'est vraie

☐ **M46** On note h la fonction définie sur $\mathbb{R}$ comme suit :

- $h(x) = 0$ si $x \in \mathbb{Z}$;
- $h(x) = \dfrac{1}{q}$ si $x = \dfrac{p}{q}$ est un nombre rationnel non entier écrit sous forme irréductible (avec donc $q \geqslant 2$, et p et q sans diviseur positif commun autre que 1);
- $h(x) = 0$ si x est irrationnel.

Par exemple, $h\left(\sqrt{2}\right) = 0$, $h(1) = 0$, et $h\left(\dfrac{2}{3}\right) = h\left(\dfrac{4}{6}\right) = \dfrac{1}{3}$.
On introduit des propriétés éventuelles de h :
(a) pour tout x réel, $h(x+1) = h(x)$;
(b) l'ensemble des valeurs prises par h est un intervalle;
(c) la fonction h est continue en 0;
(d) la fonction h est continue en $\dfrac{1}{2}$;
(e) la fonction h tend vers 0 en $+\infty$.
Lesquelles de ces cinq propriétés sont vraies?

A (a) et (d) B (c) et (e) C (a), (b) et (c) D (b), (d) et (e) E (a) et (c)

Exercice 6. Logique

Vous êtes perdu sur une piste dans le désert. Vous arrivez à une bifurcation : de cette bifurcation partent deux pistes, une vers la gauche et une vers la droite.
Chacune de ces pistes peut conduire à une oasis ou se perdre dans le désert.
À côté de la bifurcation se tiennent trois sphinx.
Chaque sphinx vous donne une affirmation :
Sphinx 1 : « Une au moins des deux pistes mène à une oasis. »
Sphinx 2 : « La piste de droite se perd dans le désert. »
Sphinx 3 : « Si la piste de gauche se perd dans le désert alors celle de droite mène à une oasis. »

Pour les questions **M47** et **M48** , on suppose que la proposition suivante est vraie :
Proposition A : Les trois sphinx disent la vérité.

☐ **M47** La piste de droite mène-t-elle à une oasis ou dans le désert ?

$\boxed{\text{A}}$ Dans le désert
$\boxed{\text{B}}$ À une oasis
$\boxed{\text{C}}$ La proposition A est absurde
$\boxed{\text{D}}$ Les deux sont possibles

☐ **M48** La piste de gauche mène-t-elle à une oasis ou dans le désert ?

$\boxed{\text{A}}$ Dans le désert
$\boxed{\text{B}}$ Les deux sont possibles
$\boxed{\text{C}}$ À une oasis
$\boxed{\text{D}}$ La proposition A est absurde

Pour les questions **M49** et **M50** , on suppose que la proposition suivante est vraie :
Proposition B : Le sphinx 1 ment, mais chacun des autres peut mentir ou dire la vérité.

☐ **M49** La piste de droite mène-t-elle à une oasis ou dans le désert ?

$\boxed{\text{A}}$ Dans le désert
$\boxed{\text{B}}$ Les deux sont possibles
$\boxed{\text{C}}$ À une oasis
$\boxed{\text{D}}$ La proposition B est absurde

☐ **M50** La piste de gauche mène-t-elle à une oasis ou dans le désert ?

$\boxed{\text{A}}$ Dans le désert
$\boxed{\text{B}}$ La proposition B est absurde
$\boxed{\text{C}}$ Les deux sont possibles
$\boxed{\text{D}}$ À une oasis

Pour les questions **M51** et **M52** , on suppose que la proposition suivante est vraie :
Proposition C : Le sphinx 2 ment, mais chacun des autres peut mentir ou dire la vérité.

☐ **M51** La piste de droite mène-t-elle à une oasis ou dans le désert ?

$\boxed{\text{A}}$ Les deux sont possibles
$\boxed{\text{B}}$ Dans le désert
$\boxed{\text{C}}$ La proposition C est absurde
$\boxed{\text{D}}$ À une oasis

☐ **M52** La piste de gauche mène-t-elle à une oasis ou dans le désert ?

A Dans le désert
B Les deux sont possibles
C À une oasis
D La proposition C est absurde

Pour les questions **M53** et **M54**, on suppose que la proposition suivante est vraie :
Proposition D : Le sphinx 3 ment, mais chacun des autres peut mentir ou dire la vérité.
☐ **M53** La piste de droite mène-t-elle à une oasis ou dans le désert ?

A La proposition D est absurde
B Les deux sont possibles
C Dans le désert
D À une oasis

☐ **M54** La piste de gauche mène-t-elle à une oasis ou dans le désert ?

A Les deux sont possibles
B La proposition D est absurde
C Dans le désert
D À une oasis

Pour les questions **M55** et **M56** , on suppose que la proposition suivante est vraie :
Proposition E : Les trois sphinx mentent.

☐ **M55** La piste de droite mène-t-elle à une oasis ou dans le désert ?

A Les deux sont possibles
B Dans le désert
C La proposition E est absurde
D À une oasis

☐ **M56** La piste de gauche mène-t-elle à une oasis ou dans le désert ?

A Les deux sont possibles
B Dans le désert
C La proposition E est absurde
D À une oasis

Pour les questions **M57** et **M58** , on suppose que la proposition suivante est vraie :
Proposition F : Seul un des trois sphinx dit la vérité.

☐ **M57** La piste de droite mène-t-elle à une oasis ou dans le désert ?

A La proposition F est absurde
B À une oasis
C Les deux sont possibles
D Dans le désert

☐ **M58** La piste de gauche mène-t-elle à une oasis ou dans le désert ?

A La proposition F est absurde
B Dans le désert
C À une oasis
D Les deux sont possibles

Pour les questions **M59** et **M60**, on suppose que la proposition suivante est vraie :

Proposition G : Seul un des trois sphinx ment.

☐ **M59** La piste de droite mène-t-elle à une oasis ou dans le désert ?

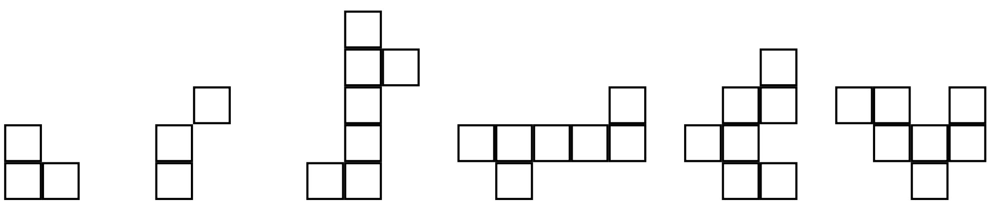
A La proposition G est absurde
B Dans le désert
C Les deux sont possibles
D À une oasis

☐ **M60** La piste de gauche mène-t-elle à une oasis ou dans le désert ?

A Dans le désert
B La proposition G est absurde
C À une oasis
D Les deux sont possibles

Exercice 7. Polyominos

Un **polyomino** est un assemblage de carrés de côté 1, appelés « cellules », collés les uns aux autres le long d'un côté. Deux tels assemblages définissent le même polyomino lorsqu'ils peuvent être transformés l'un en l'autre à l'aide de symétries, de rotations ou de translations. Il existe un seul polyomino à une cellule, représenté par un carré de côté 1. De même, il existe un seul polyomino à deux cellules, représenté par deux cellules accolées.
Dans le dessin suivant :



1 2 3 4 5 6

- Toutes les assemblages présentés représentent un polyomino, à l'exception de la figure 2.
- Les assemblages 3 et 4 représentent le même polyomino car on peut obtenir l'un à partir de l'autre à l'aide d'une symétrie d'axe vertical et d'une rotation.

△ **L9** Combien existe-t-il de polyominos à trois cellules ?

△ **L10** Combien existe-t-il de polyominos à quatre cellules ?

☐ **M61** Le nombre de polyominos à cinq cellules est :

A 12 B 8 C 5 D 15 E 10

Un **polyomino unilatéral** est un assemblage de cellules : deux assemblages représentent le même polyomino unilatéral lorsqu'il est possible de transformer l'un en l'autre uniquement à l'aide de rotations ou de translations.

Dans le dessin ci-dessus, les assemblages 5 et 6 représentent le même polyomino et aussi le même polyomino unilatéral, car on peut obtenir l'un à partir de l'autre à l'aide d'une rotation.
En revanche, les assemblages 3 et 4 représentent deux polyominos unilatéraux distincts.

☐ **M62** Le nombre de polyominos unilatéraux à trois cellules est :

$\boxed{A}$ 3 $\boxed{B}$ 2 $\boxed{C}$ 1 $\boxed{D}$ 4

☐ **M63** Le nombre de polyominos unilatéraux à quatre cellules est : 3

$\boxed{A}$ 3 $\boxed{B}$ 5 $\boxed{C}$ 4 $\boxed{D}$ 7 $\boxed{E}$ 6

☐ **M64** Le nombre de polyominos unilatéraux à cinq cellules est :

$\boxed{A}$ 15 $\boxed{B}$ 17 $\boxed{C}$ 18 $\boxed{D}$ 12 $\boxed{E}$ 10

☐ **M65** Le nombre de polyominos à six cellules est :

$\boxed{A}$ 25 $\boxed{B}$ 23 $\boxed{C}$ 35 $\boxed{D}$ 31 $\boxed{E}$ 18