☙ Évaluation ESciA session 16 mars 2024 ❧

Mathématiques expertes Épreuve 2 , option B

Durée : 1h 30 min

FONCTIONNEMENT DES QUESTIONS

• Les questions à *choix multiples* sont numérotées M1, M2, etc. Le candidat y répond en **noircissant** la case correspondant à sa réponse dans la feuille-réponse □.
Pour chacune de ces questions, il y a une et une seule bonne réponse.
Toute réponse fausse retire des points aux candidats.
Noircir plusieurs réponses à une même question a un effet de neutralisation (le candidat récoltera 0 point).
• Les questions *à réponse brute* sont numérotées L1, L2, etc.
Elles ne demandent aucune justification : les résultats sont reportés par le candidat dans le cadre correspondant sur la feuille-réponse △. Tout débordement de cadre est interdit.
• Les questions *à réponse rédigée* sont numérotées RI, R2, etc. Elles sont écrites dans le cadre correspondant sur la feuille-réponse ◯ ou la feuille-réponse △, selon le symbole précédant le numéro de la question. Tout débordement de cadre est interdit.

CONSEILS DE BON SENS

• L'énoncé est (très) long : il n'est absolument pas nécessaire d'avoir tout traité pour avoir une note et un classement excellents.
• Ne vous précipitez pas pour reporter vos réponses, notamment aux questions à choix multiples. Il est préférable d'avoir terminé un exercice avant d'en reporter les réponses.
• Ne répondez jamais au hasard à une question à choix multiples !
• Selon l'exercice, les questions peuvent être dépendantes les unes des autres ou non. Soyez attentifs à la variété des situations.

Exercice 1. Logique : schémas de récurrence

Dans tout l'exercice, on considère une propriété $\mathscr{P}(n)$ dépendant d'un entier $n \geqslant 0$.
On dit qu'elle est universelle lorsque $\mathscr{P}(n)$ est vraie pour tout entier naturel n.
Par exemple, lorsque $\mathscr{P}(n)$ est la propriété « $(n+1)^2 = n^2+2n+1$ », elle est universelle, et lorsque $\mathscr{P}(n)$ est la propriété « $(n+1)^2 = n^2+1$ » elle ne l'est pas (étant fausse pour $n=1$, par exemple).
On s'intéresse à des propriétés définies formellement à partir de $\mathscr{P}(n)$ qui, lorsqu'elles sont vraies, assurent que $\mathscr{P}(n)$ est universelle.
Dans toutes les questions de l'exercice, on demande de dire si l'affirmation est vraie (quel que soit le choix de la propriété $\mathscr{P}(n)$), fausse (pour au moins une propriété $\mathscr{P}(n)$), ou n'a pas de sens logique.

☐ **M1** Si $\mathscr{P}(n)$ implique $\mathscr{P}(n+1)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, alors $\mathscr{P}(n)$ est universelle.

$\boxed{\text{A}}$ Faux $\boxed{\text{B}}$ Non sens $\boxed{\text{C}}$ Vrai

☐ **M2** Si $\mathscr{P}(0)$ est vraie et $\mathscr{P}(n)$ implique $\mathscr{P}(n+1)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, alors $\mathscr{P}(n)$ est universelle.

$\boxed{\text{A}}$ Faux $\boxed{\text{B}}$ Non sens $\boxed{\text{C}}$ Vrai

☐ **M3** Si $\mathscr{P}(1)$ est vraie et $\mathscr{P}(n)$ implique $\mathscr{P}(n-1)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, alors $\mathscr{P}(n)$ est universelle.

$\boxed{\text{A}}$ Non sens $\boxed{\text{B}}$ Vrai $\boxed{\text{C}}$ Faux

☐ **M4** Si $\mathscr{P}(1)$ est vraie et $\mathscr{P}(n)$ implique $\mathscr{P}(n+1)$ et $\mathscr{P}(n-1)$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, alors $\mathscr{P}(n)$ est universelle.

$\boxed{\text{A}}$ Vrai $\boxed{\text{B}}$ Faux $\boxed{\text{C}}$ Non sens

☐ **M5** Si P(O) est vraie et $\mathscr{P}(n)$ implique $\mathscr{P}(2n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, alors $\mathscr{P}(n)$ est universelle.

$\boxed{\text{A}}$ Non sens $\boxed{\text{B}}$ Faux $\boxed{\text{C}}$ Vrai

☐ **M6** Si d'une part $\mathscr{P}(0)$ et $\mathscr{P}(1)$ sont vraies, et d'autre part $\mathscr{P}(n)$ implique $\mathscr{P}(2n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, alors $\mathscr{P}(n)$ est universelle.

$\boxed{\text{A}}$ Faux $\boxed{\text{B}}$ Vrai $\boxed{\text{C}}$ Non sens

☐ **M7** Si d'une part $\mathscr{P}(0)$ est vraie, et d'autre part $\mathscr{P}(n)$ implique $\mathscr{P}(2n)$ et $\mathscr{P}(2n+1)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, alors $\mathscr{P}(n)$ est universelle.

$\boxed{\text{A}}$ Non sens $\boxed{\text{B}}$ Vrai $\boxed{\text{C}}$ Faux

☐ **M8** Si d'une part $\mathscr{P}(0)$ et $\mathscr{P}(1)$ sont vraies, et d'autre part $\mathscr{P}(n)$ implique $\mathscr{P}(2n)$ et $\mathscr{P}(3n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, alors $\mathscr{P}(n)$ est universelle.

$\boxed{\text{A}}$ Non sens $\boxed{\text{B}}$ Faux $\boxed{\text{C}}$ Vrai

△ **LI** Donner, sans justifier votre réponse, le plus petit ensemble d'entiers naturels A pour lequel ajouter l'hypothèse « $\mathscr{P}(n)$ est vraie pour tout n dans A » à l'hypothèse « pour tout n dans $\mathbb{N}, \mathscr{P}(n)$ implique $\mathscr{P}(2n)$ » suffit à assurer que $\mathscr{P}(n)$ est universelle.

Exercice 2. Produit de convolution de deux suites

Dans tout l'exercice, on appelle suite réelle toute suite à termes réels définie à partir du rang 0.
Pour deux suites réelles u et v, on note $u = v$ pour signifier que $u_n = v_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
Lorsque a désigne un nombre réel, on note $\tilde{a}$ la suite réelle dont tous les termes sont égaux à a, autrement dit $\tilde{a}_n = a$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
En particulier $\tilde{0}$ a tous ses termes nuls, et est appelée la **suite nulle**.
On note e la suite réelle définie par $e_0 = 1$ et $e_n = 0$ pour tout entier naturel $n \geqslant 1$.
Lorsque $u = (u_n)_{n \in N}$ et $v = (v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ désignent deux suites réelles, on définit une nouvelle suite réelle, notée $u \star v$ et appelée produit de convolution de u et v, en posant

$$\begin{array}{lcl}
(u * v)_0 & = & u_0 v_0, \\
(u * v)_1 & = & u_1 v_0 + u_0 v_1, \\
(u * v)_2 & = & u_2 v_0 + u_1 v_1 + u_0 v_2, \\
\ldots\ldots\ldots & & \\
(u * v)_n & = & u_n v_0 + u_{n-1} v_1 +_{n-2} v_2 + \ldots + u_1 v_{\ -1} + u_0 v_n .
\end{array}$$

△ **L2** On considère la suite u définie par $u_0 = 4, u_1 = 2$ et $u_n = 1$ pour tout entier $n \geqslant 2$. Donner la valeur de $(u \star u)_3$

☐ **M9** On considère la suite u définie par $u_0 = 4, u_1 = 2$ et $u_n = 1$ pour tout entier $n \geqslant 2$. Alors $(u \star u)_{10}$ vaut :

A 18 B 19 C 12 D 29 E 28

Vrai ou faux?

Dans les questions **M10** à **M14**, on demande d'évaluer la validité des propositions indiquées.

☐ **M10** On a $u \star \tilde{0} = \tilde{0}$ pour toute suite réelle u.

A Faux B Vrai

☐ **M11** On a $u \star \tilde{1} = u$ pour toute suite réelle u.

A Faux B Vrai

☐ **M12** On a $u \star e = u$ pour toute suite réelle u.

A Faux B Vrai

☐ **M13** On a $u \star v = v \star u$ quelles que soient les suites réelles u et v.

A Faux B Vrai

☐ **M14** On considère la suite réelle w définie par $w_0 = 0, w_1 = 1$ et $w_n = 0$ pour tout entier naturel $n \geqslant 2$.
Pour toute suite réelle u et tout entier naturel n :

$\boxed{\text{A}}$ $(u \star w)_n = u_{n+1}$
$\boxed{\text{B}}$ $(u \star w)_n = u_{n-1}$
$\boxed{\text{C}}$ aucune des autres réponses proposées n'est vraie en toute généralité
$\boxed{\text{D}}$ $(u \star w)_{n+1} = u_n$

☐ **M15** On considère la suite réelle u définie par $u_n = 1$ si n est pair, et $u_n = 0$ si n est impair; on considère aussi la suite réelle v définie par $v_n = 0$ si n est pair, et $v_n = 1$ si n est impair.
Pour tout entier naturel n :

$\boxed{\text{A}}$ $(u \star v)_n = (n-1)/2$ si n est impair, et $(u \star v)_n = 0$ si n est pair
$\boxed{\text{B}}$ $(u \star v)_n = (n+1)/2$ si n est impair, et $(u \star v)_n = 0$ si n est pair
$\boxed{\text{C}}$ $(u \star v)_n = n/2$ si n est pair, et $(u \star v)_n = 0$ si n est impair
$\boxed{\text{D}}$ $(u \star v)_n = (n+2)/2$ si n est pair, et $(u \star v)_n = 0$ si n est impair
$\boxed{\text{E}}$ aucune des autres réponses proposées n'est vraie en toute généralité

Suites arithmétiques/géométriques

☐ **M16** Si u et v sont constantes, alors $u \star v$:

$\boxed{\text{A}}$ est géométrique
$\boxed{\text{B}}$ est arithmétique
$\boxed{\text{C}}$ peut n'être ni arithmétique ni géométrique, selon le choix de u et v

Dans les questions **M17** à **M21**, on fixe deux suites réelles u et v. On rappelle que toute suite constante est arithmétique (de raison 0).

☐ **M17** Si u et v sont arithmétiques alors $u \star v$:

$\boxed{\text{A}}$ n'est jamais arithmétique
$\boxed{\text{B}}$ est arithmétique
$\boxed{\text{C}}$ peut être arithmétique ou non, selon le choix de u et v

△ **L3** On suppose u géométrique de raison 2 et v géométrique de raison 4. Donner une expression simplifiée de $(u \star v)_n$ en fonction de n, u_0 et v_0.

☐ **M18** Si u et v sont géométriques de raisons non nulles différentes, et si $u_0 \neq 0$ et $v_0 \neq 0$, alors $u \star v$:

$\boxed{\text{A}}$ n'est jamais géométrique
$\boxed{\text{B}}$ peut être géométrique ou non, selon les valeurs respectives de u et v
$\boxed{\text{C}}$ est géométrique

☐ **M19** Si u et v sont géométriques de raisons non nulles différentes, et si $u_0 \neq 0$ et $v_0 \neq 0$, alors $u \star v$:

$\boxed{\text{A}}$ est la somme de deux suites géométriques
$\boxed{\text{B}}$ n'est jamais la somme de deux suites géométriques
$\boxed{\text{C}}$ peut être la somme de deux suites géométriques ou non, selon les valeurs respectives de u et v

◯ **R1** Justifier votre réponse à la question **M19**.

☐ **M20** Si u et v sont géométriques et de raisons différentes de 0 et 1, alors $u \star v$:

$\boxed{\text{A}}$ peut être arithmétique ou non, selon les valeurs respectives de u et v
$\boxed{\text{B}}$ n'est jamais arithmétique
$\boxed{\text{C}}$ est arithmétique

Valuation, résolution d'équations

Soit u une suite réelle différente de 0. Il existe donc un entier $n \geqslant 0$ tel que $u_n \neq 0$, et on note $\alpha(u)$ le plus petit de ces entiers, appelé valuation de u.
Par exemple, pour une suite u vérifiant $u_0 = 0$, $u_1 = 0$, $u_2 = -4$ et $u_3 = 9$, on a $\alpha(u) = 2$.

☐ **M21** Soit u et v deux suites réelles différentes de 0. On note p la valuation de u, et q celle de v. On note m le plus petit des entiers p et q, et M le plus grand d'entre eux. On peut alors affirmer :

$\boxed{\text{A}}$ que $(u \star v)_n = 0$ pour tout entier naturel $n < pq$, mais que $(u \star v)_{pq} \neq 0$
$\boxed{\text{B}}$ que $(u \star v)_n = 0$ pour tout entier naturel $n < M$, mais que $(u \star v)_M \neq 0$
$\boxed{\text{C}}$ qu'aucune des autres affirmations n'est systématiquement vraie
$\boxed{\text{D}}$ que $(u \star v)_n = 0$ pour tout entier naturel $n < p+q$, mais que $(u \star v)_{p+q} \neq 0$
$\boxed{\text{E}}$ que $(u \star v)_n = 0$ pour tout entier naturel $n < m$, mais que $(u \star v)_m \neq 0$

☐ **M22** Soit u et v deux suites différentes de la suite nulle. On peut alors affirmer :

$\boxed{\text{A}}$ que $u \star v$ n'est pas la suite nulle, et que sa valuation est le plus petit des entiers $\alpha(u)$ et $\alpha(v)$
$\boxed{\text{B}}$ qu'aucune des autres affirmations n'est systématiquement vraie
$\boxed{\text{C}}$ que $u \star v$ n'est pas la suite nulle, et que sa valuation est $\alpha(u)\alpha(v)$
$\boxed{\text{D}}$ que $u \star v$ n'est pas la suite nulle, et que sa valuation est le plus grand des entiers $\alpha(u)$ et $\alpha(v)$
$\boxed{\text{E}}$ que $u \star v$ n'est pas la suite nulle, et que sa valuation est $\alpha(u) + \alpha(v)$

☐ **M23** Soit b une suite réelle. S'il existe une suite réelle u telle que $u \star b = e$, alors la conséquence la plus précise que l'on puisse en tirer est :

$\boxed{\text{A}}$ $b_0 \neq 0$
$\boxed{\text{B}}$ aucune des autres affirmations n'est vraie en toute généralité
$\boxed{\text{C}}$ $b_n \neq 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$
$\boxed{\text{D}}$ il existe un $n \in \mathbb{N}$ tel que $b_n \neq 0$
$\boxed{\text{E}}$ $b_1 \neq 0$

☐ **M24** On fixe deux suites réelles b et c telles que $b_0 \neq 0$.
L'affirmation la plus précise que l'on puisse soutenir est :

$\boxed{\text{A}}$ aucune des autres affirmations ne peut être soutenue
$\boxed{\text{B}}$ il existe plusieurs suites réelles u telles que $u \star b = c$
$\boxed{\text{C}}$ il n'existe aucune suite réelle u telle que $u \star b = c$
$\boxed{\text{D}}$ il existe une et une seule suite réelle u telle que $u \star b = c$
$\boxed{\text{E}}$ il existe au moins une suite réelle u telle que $u \star b = c$

◯ **R2** Justifier votre réponse à la question précédente.

☐ **M25** Soit b une suite réelle non nulle. S'il existe une suite réelle u telle que $u \star u = b$, alors :

$\boxed{\text{A}}$ on peut affirmer que la valuation de u est impaire
$\boxed{\text{B}}$ on peut affirmer que la valuation de b est paire

$\boxed{\text{C}}$ aucune des autres affirmations ne peut être soutenue
$\boxed{\text{D}}$ on peut affirmer que la valuation de b est impaire
$\boxed{\text{E}}$ on peut affirmer que la valuation de u est paire

☐ **M26** Soit b une suite réelle telle que $b_0 > 0$.
On peut alors affirmer :

$\boxed{\text{A}}$ qu'aucune des autres affirmations ne peut être soutenue
$\boxed{\text{B}}$ qu'il existe exactement une suite réelle u telle que $u \star u = b$
$\boxed{\text{C}}$ qu'il existe une infinité de suites réelles u telles que $u \star u = b$
$\boxed{\text{D}}$ qu'il n'existe aucune suite réelle u telle que $u \star u = b$
$\boxed{\text{E}}$ qu'il existe exactement deux suites réelles u telles que $u \star u = b$

Exercice 3. Suites réelles

On admet que les formules suivantes sont valables quels que soient les réels x et y :

$$\left\{\begin{array}{lcl} \sin(x+y) & = & \sin(x)\cos(y)+\cos(x)\sin(y) \text{ et} \\ \cos(x+y) & = & \cos(x)\cos(y)-\sin(x)\sin(y). \end{array}\right.$$

On admet de plus l'inégalité :

$$\text{pour tout } x \in \mathbb{R}, |\sin(x)| \leqslant |x|.$$

☐ **M27** Soit x et y deux nombres réels. En résolvant le système

$$\left\{\begin{array}{lcl} x & = & u+v \\ y & = & u-v \end{array}\right.$$

d'inconnues u et v, on obtient l'identité :

$\boxed{\text{A}}$ $\sin(x)-\sin(y) = 2\cos\left(\frac{x-y}{2}\right)\sin\left(\frac{x+y}{2}\right)$
$\boxed{\text{B}}$ $\sin(x)-\sin(y) = 2\cos\left(\frac{x+y}{2}\right)\sin\left(\frac{x+y}{2}\right)$
$\boxed{\text{C}}$ $\sin(x)-\sin(y) = -2\cos\left(\frac{x+y}{2}\right)\sin\left(\frac{x-y}{2}\right)$
$\boxed{\text{D}}$ $\sin(x)-\sin(y) = -2\cos\left(\frac{x-y}{2}\right)\sin\left(\frac{x+y}{2}\right)$
$\boxed{\text{E}}$ $\sin(x)-\sin(y) = 2\cos\left(\frac{x+y}{2}\right)\sin\left(\frac{x-y}{2}\right)$

☐ **M28** Soit x et y deux nombres réels. Parmi celles des inégalités suivantes qui sont vraies (quel que soit le choix de x et y), la plus précise est :

$\boxed{\text{A}}$ $|\sin(x)-\sin(y)| \leqslant \dfrac{1}{2}|x-y|$
$\boxed{\text{B}}$ $|\sin(x)-\sin(y)| \leqslant \dfrac{1}{2}$
$\boxed{\text{C}}$ $|\sin(x)-\sin(y)| \leqslant |x+y|$
$\boxed{\text{D}}$ $|\sin(x)-\sin(y)| \leqslant 2|x-y|$
$\boxed{\text{E}}$ $|\sin(x)-\sin(y)| \leqslant |x-y|$

Dans toute la suite, pour une suite $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ à termes réels, on considère la suite $\Delta u = (u_{n+1}-u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
Par exemple, si $u_n = n^2$ pour tout entier $n \geqslant 0$, on a $(\Delta u)_n = u_{n+1}-u_n = (n+1)^2-n^2 = 2n+1$ pour tout entier $n \geqslant 0$.

Dans les questions **M29**, **M30** et **M31**, on examine quelques cas particuliers.

☐ **M29** On suppose que $u_n = \sqrt{n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Alors la suite Δu :

A n'a pas de limite
B a pour limite 0
C a pour limite $\dfrac{1}{2\sqrt{n}}$
D a pour limite $\dfrac{1}{2}$
E a pour limite $+\infty$

☐ **M30** On donne l'identité $y^3 - x^3 = (y-x)\left(y^2 + xy + x^2\right)$ pour tous réels x et y.
Pour $u = \left[\left(\sqrt{n}\right)^3\right]_{n\in\mathbb{N}}$, la suite Δu :

A a pour limite 1
B a pour limite $\dfrac{3\sqrt{n}}{2}$
C a pour limite 0
D n'a pas de limite
E a pour limite $+\infty$

☐ **M31** Lorsque $u_n = \sin\left(\dfrac{\pi}{2}\sqrt{n}\right)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, la suite Δu :

A n'a pas de limite
B a pour limite 1
C a pour limite 2
D a pour limite 0
E a pour limite $\dfrac{\pi}{4}$

☐ **M32** On revient au cas général d'une suite u de nombres réels. On suppose que Δu est bornée (autrement dit, majorée et minorée).
L'affirmation la plus précise que l'on puisse soutenir est alors que :

A la suite u est convergente
B la suite u est majorée
C la suite de terme général $\dfrac{u_n}{n}$ est majorée
D aucune des autres affirmations ne peut être soutenue
E la suite u a tous ses termes positifs

◯ **R3** Justifier votre réponse à la question **M32**.

☐ **M33** Lorsque $u_n = \sin\left(\dfrac{\pi}{2}\sqrt{n}\right)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, la suite u :

A a pour limite $\sin\left(\sqrt{\pi}\right)$
B pour limite 1
C a pour limite 0
D a pour limite -1
E n'a pas de limite

☐ **M34** On revient au cas général d'une suite u de nombres réels. Sachant que Δu converge vers 0 et que u est bornée, l'affirmation la plus précise que l'on puisse soutenir est que :

A aucune des autres affirmations ne peut être soutenue
A u n'a pas de limite finie
B u converge vers 0

[C] u converge vers 1
[D] il existe un rang n_0 à partir duquel $u_n \geqslant 0$

☐ **M35** On suppose qu'il existe un entier $n_0 \geqslant 0$ et un réel $a > 0$ tels que $u_{n+1} - u_n \geqslant a$ pour tout entier $n \geqslant n_0$.
L'affirmation la plus précise que l'on puisse soutenir est alors :

[A] u a pour limite na
[B] aucune des affirmations indiquées ne peut être soutenue
[C] dans certains cas la suite u converge, dans d'autres elle diverge
[D] u tend vers $+\infty$
[E] $\dfrac{u_n}{n}$ tend vers a quand n tend vers $+\infty$

☐ **M36** On suppose que $u_{n+1} - u_n \geqslant n$ pour tout entier naturel n.
L'affirmation la plus précise que l'on puisse soutenir est alors :

[A] la suite u tend vers $+\infty$
[B] la suite de terme général $\dfrac{u_n}{n^2}$ converge vers 1
[C] la suite de terme général $\dfrac{u_n}{n^2}$ converge vers $\dfrac{1}{2}$
[D] la suite u tend vers $\dfrac{n^2}{2}$
[E] la suite de terme général $\dfrac{u_n}{n}$ tend vers $+\infty$

☐ **M37** On suppose que $u_0 \geqslant 0$. On suppose que $u_{n+1} - u_n \geqslant 2^n$ pour tout entier naturel n.
L'affirmation la plus précise que l'on puisse soutenir est alors :

[A] la suite de terme général $\dfrac{u_n}{2^{n+1}}$ tend vers $+\infty$
[B] aucune des autres affirmations ne peut être soutenue
[C] on a $\dfrac{u_n}{2^{n+1}} \geqslant \dfrac{1}{4}$ pour tout entier $n \geqslant 0$
[D] on a $\dfrac{u_n}{2^{n+1}} \geqslant \dfrac{1}{4}$ pour tout entier $n \geqslant 1$
[E] la suite de terme général $\dfrac{u_n}{2^{n+1}}$ converge vers 1

☐ **M38** Soit f une fonction de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}$, deux fois dérivable et telle que la dérivée seconde f'' soit positive.
L'affirmation « pour tout entier naturel $n \geqslant 1$ on a $f(n+1) + f(n-1) - 2f(n) \geqslant 0$ » :

[A] est vraie quelle que soit la fonction f vérifiant les hypothèses
[B] est fausse quelle que soit la fonction f vérifiant les hypothèses
[C] peut être vraie ou fausse, selon la fonction f vérifiant les hypothèses

Suites convexes

On dit que la suite u est convexe lorsque la suite Δu est croissante.
Par exemple, la suite $u = (n)_{n \in \mathbb{N}}$ est convexe car Δu est constante (donc croissante). On rappelle que toute suite constante est arithmétique (de raison 0).

△ **L4** Préciser (par simple référence aux numéros), dans quels cas la suite u est convexe :

(1) $u_n = n^2$ pour tout $n \in \mathbb{N}$;
(2) $u_n = [\ln(n+1)]^2$ pour tout $n \in \mathbb{N}$;
(3) $u_n = \dfrac{1}{n+1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$;

(4) $u_n = \mathrm{e}^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$;
(5) $u_n = \dfrac{1-n}{1+n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

☐ **M39** On suppose que les suites u et $-u$ sont convexes. L'affirmation la plus précise que l'on puisse soutenir alors que la suite u est :

$\boxed{\text{A}}$ arithmétique $\boxed{\text{B}}$ décroissante $\boxed{\text{C}}$ croissante $\boxed{\text{D}}$ constante $\boxed{\text{E}}$ géométrique

☐ **M40** Si u est convexe et il existe un entier naturel n tel que $u_{n+1} - u_n > 0$, alors :

$\boxed{\text{A}}$ aucune des autres affirmations n'est vraie en toute généralité
$\boxed{\text{B}}$ u tend vers $+\infty$
$\boxed{\text{C}}$ u est convergente
$\boxed{\text{D}}$ u est strictement décroissante puis strictement croissante

☐ **M41** Si u est convexe et bornée alors la suite Δu :

$\boxed{\text{A}}$ tend vers $+\infty$
$\boxed{\text{B}}$ aucune des autres affirmations n'est vraie en toute généralité
$\boxed{\text{C}}$ converge vers une limite non nulle
$\boxed{\text{D}}$ converge vers 0
$\boxed{\text{E}}$ n'a pas de limite (finie ou non)

☐ **M42** On suppose que u est convexe et bornée.
L'affirmation la plus précise que l'on puisse soutenir est alors que :

$\boxed{\text{A}}$ u est décroissante et convergente
$\boxed{\text{B}}$ u est croissante et convergente
$\boxed{\text{C}}$ u est négative
$\boxed{\text{D}}$ u est positive
$\boxed{\text{E}}$ u est convergente

Exercice 4. Systèmes de Steiner

On définit la terminologie suivante :

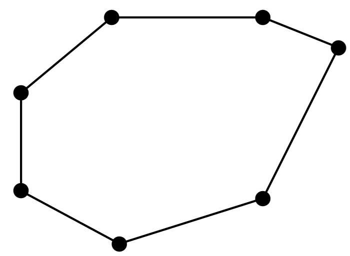
- Une **paire** d'un ensemble E est un sous-ensemble de E possédant exactement deux éléments. Par exemple, les ensembles $\{1\ ;\ 3\}$ et $\{2\ ;\ 4\}$ sont des paires de l'ensemble $\{1\ ;\ 2\ ;\ 3\ ;\ 4\ ;\ 5\}$.

  On rappelle que les ensembles $\{3\ ;\ 1\}$ et $\{1\ ;\ 3\}$ sont identiques puisqu'ils ont les mêmes éléments.
- Un **triplet** d'un ensemble E est un sous-ensemble de E possédant exactement trois éléments. Par exemple $\{1\ ;\ 2\ ;\ 4\}$ est un triplet de $\{1\ ;\ 2\ ;\ 3\ ;\ 4\ ;\ 5\}$, égal au triplet $\{4\ ;\ 2\ ;\ 1\}$, au triplet $\{1\ ;\ 4\ ;\ 2\}$ etc.
- Une paire est dite **incluse** dans un triplet lorsque tout élément de la paire est aussi un élément du triplet. Par exemple $\{1\ ;\ 4\}$ est incluse dans $\{1\ ;\ 2\ ;\ 4\}$ (les éléments 1 et 4 sont tous deux dans $\{1\ ;\ 2\ ;\ 4\}$), mais $\{1\ ;\ 5\}$ n'est pas incluse dans $\{1\ ;\ 2\ ;\ 4\}$ car 5 appartient à $\{1\ ;\ 5\}$ mais pas à $\{1\ ;\ 2\ ;\ 4\}$. Dans tout l'exercice, on note E_n l'ensemble des entiers naturels compris entre 1 et n, autrement dit

$$E_n = \{1\ ;\ 2\ ;\ \dots\ ;\ n\}.$$

Un peu de dénombrement

Dans les questions **M43**, **M44** et **M45**, on considère les 7 sommets d'un heptagone convexe.



☐ **M43** Le nombre de paires de sommets de l'heptagone est :

$\boxed{\text{A}}$ 14 $\boxed{\text{B}}$ 42 $\boxed{\text{C}}$ 21 $\boxed{\text{D}}$ 13 $\boxed{\text{E}}$ aucune des autres réponses proposées

☐ **M44** Le nombre de paires de sommets de l'heptagone qui ne sont pas côte-à-côte est :

$\boxed{\text{A}}$ aucune des autres réponses proposées $\boxed{\text{B}}$ 11 $\boxed{\text{C}}$ 28 $\boxed{\text{D}}$ 12 $\boxed{\text{E}}$ 14

☐ **M45** Le nombre total de triangles que l'on peut former sur des sommets de l'heptagone et qui n'ont pas de côté commun avec l'heptagone est :

$\boxed{\text{A}}$ 7 $\boxed{\text{B}}$ 21 $\boxed{\text{C}}$ 2 $\boxed{\text{D}}$ 3 $\boxed{\text{E}}$ aucune des autres réponses proposées

☐ **M45** Soit un entier naturel $n \geqslant 3$. Le nombre de paires de E_n et le nombre de triplets de E_n sont respectivement égaux à :

$\boxed{\text{A}}$ 2^{n-1} et 2^{n-2}

$\boxed{\text{B}}$ $\dfrac{n(n+1)}{2}$ et $\dfrac{n(n+1)(n+2)}{3}$

$\boxed{\text{C}}$ $\dfrac{n(n-1)}{2}$ et $\dfrac{n(n-1)(n-2)}{6}$

$\boxed{\text{D}}$ $\dfrac{n(n-1)}{2}$ et $\dfrac{n(n-1)(n-2)}{3}$

$\boxed{\text{E}}$ $\dfrac{n(n+1)}{2}$ et $\dfrac{n(n+1)(n+2)}{6}$

△ **L5** Donner tous les entiers $n \geqslant 3$ tels que E_n ait autant de paires que de triplets.

Introduction aux systèmes de Steiner

On considère dans la suite un ensemble fini E. Un système de Steiner sur E est un ensemble T tel que :
(i) Les *éléments* de T sont des triplets de E.
(ii) Toute paire $\{i\ ;\ j\}$ de E est incluse dans un et un seul élément de T.
Par exemple, pour $E = \{1\ ;\ 2\ ;\ 3\}$:
• l'ensemble T formé de $\{1\ ;\ 2\ ;\ 3\}$ et $\{1\ ;\ 2\}$ n'est pas un système de Steiner car il n'est pas exclusivement constitué de triplets (l'objet $\{1\ ;\ 2\}$ de T n'est pas un triplet) ;

- l'ensemble T formé du seul triplet $\{1 ; 2 ; 3\}$ est bien un système de Steiner. En effet, $\{1 ; 2 ; 3\}$ est bien un triplet, et toute paire de $\{1 ; 2 ; 3\}$ est incluse dans $\{1 ; 2 ; 3\}$, qui est le seul élément de T.

Autre exemple, sur $E_4 = \{1 ; 2 ; 3 ; 4\}$, l'ensemble T formé des quatre triplets $\{1 ; 2 ; 3\}, \{1 ; 2 ; 4\}$, $\{2 ; 3 ; 4\}$ et $\{1 ; 3 ; 4\}$ n'est pas un système de Steiner : bien que toute paire de E_4 soit incluse dans l'un de ses éléments (ce que l'on vérifie facilement), la paire $\{1 ; 2\}$ est incluse dans plusieurs éléments de T.

☐ **M47** Sur E_4, l'ensemble T formé du seul triplet $\{1 ; 2 ; 3\}$:

A n'est pas un système de Steiner car au moins une paire de E_4 n'est incluse dans aucun élément de T
B n'est pas un système de Steiner car T n'est pas constitué uniquement de triplets
C n'est pas un système de Steiner car au moins une paire de E_4 est incluse dans plusieurs éléments de T
D est un système de Steiner
E n'est pas un système de Steiner car n'importe quelle paire de E_4 est incluse dans plusieurs éléments de T

☐ **M48** Sur E_4, l'ensemble T formé des triplets $\{1 ; 2 ; 3\}, \{1 ; 2 ; 4\}$ et $\{2 ; 3 ; 4\}$:

A n'est pas un système de Steiner car au moins une paire de E_4 est incluse dans plusieurs éléments de T
B n'est pas un système de Steiner car n'importe quelle paire de E_4 est incluse dans plusieurs éléments de T
C n'est pas un système de Steiner car T n'est pas constitué uniquement de triplets
D est un système de Steiner
E n'est pas un système de Steiner car au moins une paire de E_4 n'est incluse dans aucun élément de T

Vrai ou faux ?

☐ **M49** Il existe un et un seul système de Steiner sur E_3.

A Faux B Vrai

☐ **M50** Il existe un système de Steiner sur E_4.

A Vrai B Faux

☐ **M51** Il existe un système de Steiner sur E_5.

A Faux B Vrai

◯ **R4** Justifier votre réponse à la question **M51**.

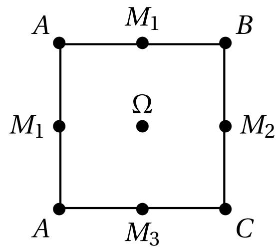
☐ **M52** Pour obtenir un système de Steiner sur E_7, quels triplets adjoindre aux triplets $\{1 ; 2 ; 3\}, \{1 ; 6 ; 7\}, \{2 ; 4 ; 6\}, \{3 ; 4 ; 7\}$ et $\{3 ; 5 ; 6\}$?

A $\{2 ; 5 ; 7\}$ et $\{1 ; 4 ; 5\}$
B aucune des autres réponses proposées ne convient
C $\{2 ; 5 ; 6\}$ et $\{1 ; 4 ; 7\}$
D $\{2 ; 5 ; 7\}$ et $\{1 ; 5 ; 6\}$

$\boxed{\text{E}}$ $\{2 ; 4 ; 5\}$ et $\{1 ; 5 ; 7\}$

Une construction sur un carré

On se place dans un plan euclidien, muni d'un repère orthonormal. On considère un carré représenté par le dessin suivant :



On note E l'ensemble constitué des sommets du carré, des milieux des côtés, et du centre du carré. Ces points sont représentés par des pastilles • sur le dessin.
On forme :

- l'ensemble T_c des triplets constitués de trois points de E alignés sur une droite parallèle à l'un des côtés du carré;
- l'ensemble T_d constitués des deux diagonales $\{A ; \Omega ; C\}$ et $\{B ; \Omega ; D\}$.

On réunit ces deux ensembles de triplets pour former un ensemble T.

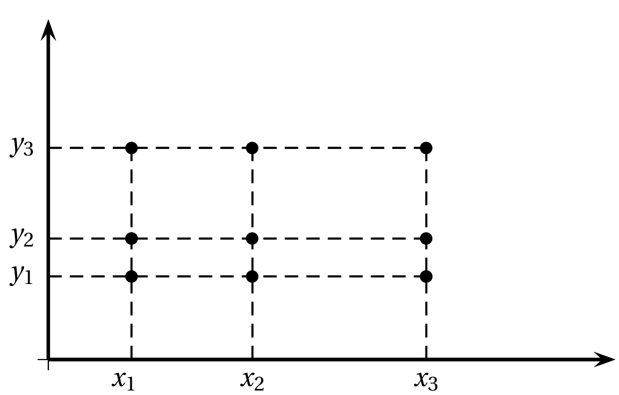
☐ **M53** L'ensemble T n'est pas un système de Steiner sur E parce que :

$\boxed{\text{A}}$ au moins une paire de E n'est incluse dans aucun élément de T
$\boxed{\text{B}}$ au moins une paire de E est incluse dans plusieurs éléments de T
$\boxed{\text{C}}$ T n'est pas constitué uniquement de triplets
$\boxed{\text{D}}$ n'importe quelle paire de E est incluse dans plusieurs éléments de T

△ **L6** Quels triplets rajouter à T pour obtenir un système de Steiner sur E?

On obtient ainsi plus généralement la construction suivante : étant donné deux triplets $A = \{x_1 ~;~ x_2 ~;~ x_3\}$ et $B = \{y_1 ~;~ y_2 ~;~ y_3\}$ de nombres, on considère l'ensemble E des points du plan dont l'abscisse est dans A, et l'ordonnée dans B. Alors E possède un système de Steiner, et mieux il existe un système de Steiner sur E contenant, entre autres :

- tous les triplets de points de E alignés sur une même droite horizontale;
- tous les triplets de points de E alignés sur une même droite verticale.



☐ **M54** Ce qui précède permet d'affirmer :

A qu'aucun ensemble fini de cardinal 9 ne possède de système de Steiner
B que tout ensemble fini de cardinal 9 possède un système de Steiner
C que certains ensembles finis de cardinal 9 possèdent un système de Steiner, mais peut-être pas tous
D qu'aucune des autres affirmations n'est vraie

Une idée séduisante

Pour une certaine valeur de l'entier $n \geqslant 6$, Jean-Pascal cherche à construire un système de Steiner sur E_n. On suppose qu'il a déjà réussi :

- à partager E_n en deux sous-ensembles A et B, tous deux non vides, et sans élément commun;
- à construire, avec quelque effort, un système de Steiner T sur A et un système de Steiner T' sur B.

Il réunit les deux systèmes, c'est-à-dire qu'il prend tous les triplets qui sont soit dans T soit dans T'. Il obtient ainsi un ensemble $T \cup T'$ de triplets de E_n.

☐ **M55** L'ensemble $T \cup T'$ n'est pas un système de Steiner sur E_n parce que :

A au moins une paire de E_n n'est incluse dans aucun élément de $T \cup T'$
B $T \cup T'$ n'est pas constitué uniquement de triplets
C au moins une paire de E_n est incluse dans plusieurs éléments de $T \cup T'$
D toutes les paires de E_n sont incluses dans plusieurs éléments de $T \cup T'$

Jean-Pascal a bien compris que sa construction n'est pas suffisante. Il va donc tenter de la modifier, soit en retirant des triplets à $T \cup T'$, soit en rajoutant des triplets à $T \cup T'$.

☐ **M56** Laquelle des affirmations suivantes est vraie?

A Il est possible, pour au moins un jeu de données n, A, B, T, T', d'obtenir un système de Steiner sur E_n à partir de $T \cup T'$ en retirant certains triplets bien choisis
B Il est est possible, pour au moins un jeu de données n, A, B, T, T', d'obtenir un système de Steiner sur E_n à partir de $T \cup T'$ en rajoutant certains triplets bien choisis
C Aucune des autres réponses n'est correcte

△ **R5** Justifier votre réponse à la question **M56**.

Une autre idée séduisante

Jean-Pascal considère maintenant la situation suivante. Il prend deux entiers naturels $n \geqslant 3$ et $p \geqslant 3$ pour lesquels il a réussi à construire un système de Steiner T_n sur E_n et un système de Steiner T_p sur E_p. Il considère l'ensemble F des points du plan dont l'abscisse x est dans E_n et l'ordonnée y dans E_p. Il espère construire un système de Steiner sur F.

☐ **M57** SiJean-Pascal parvient à ses fins, il saura qu'il existe un système de Steiner sur E_N pour N égal à :

A p^n	B np	C $n+p$	D aucun des autres nombres indiqués, en général	E n^p

Jean-Pascal regroupe alors tous les triplets suivants :
(i) ceux qui sont formés de trois points ayant la même abscisse, et les ordonnées appartiennent à un même triplet du système de Steiner T_p ;
(ii) ceux qui sont formés de trois points ayant la même ordonnée, et les abscisses appartiennent à un même triplet du système de Steiner T_n ;
(iii) enfin, pour chaque triplet A dans T_n et chaque triplet B dans T_p, il prend tous les triplets d'un système de Steiner décrit à partir de A et B entre les questions **L6** et **M54**

Il forme ainsi un ensemble de triplets qu'il note T. Jean-Pascal prétend alors que T est un système de Steiner sur F. Voici son raisonnement :

Soit $\{M, N\}$ une paire de F.
Étape 1 : les points M et N sont différents, donc leurs coordonnées respectives $(x\ ;\ y)$ et $(x'\ ;\ y')$ vérifient $x \neq x'$ et $y \neq y'$.
Étape 2 : Puisque $\{x\ ;\ x'\}$ est une paire de E_n on la rentre dans un unique triplet A du système T_n.
Étape 3 : Puisque $\{y\ ;\ y'\}$ est une paire de E_p,on la rentre dans un unique triplet B du système T_p.
Étape 4 : La paire $\{M\ ;\ N\}$ est alors incluse dans un unique triplet construit à partir de A et B (point (iii) ci-dessus).
Étape 5 : La paire $\{M\ ;\ N\}$ est alors incluse dans un unique élément du système T.

Chacune de ces étapes, *en admettant la validité des précédentes*, est soit juste, soit fausse car présente une erreur logique, soit incomplète car une affirmation est vraie bien qu'elle ne découle pas évidemment de la situation.
☐ **M58** L'étape 1 est :

A fausse B juste C incomplète

☐ **M59** En admettant la validité des étapes précédentes, l'étape 2 est :

A juste B fausse C incomplète

☐ **M60** En admettant la validité des étapes précédentes, l'étape 3 est :

A fausse B incomplète C juste

☐ **M61** En admettant la validité des étapes précédentes, l'étape 4 est :

A incomplète B juste C fausse

☐ **M62** En admettant la validité des étapes précédentes, l'étape 5 est :

A juste B fausse C incomplète

Une question de cardinal

On suppose dans cette partie que E_n possède un système de Steiner T.
☐ **M63** Le nombre de paires de E_n qui contiennent 1 et le nombre de triplets dans T qui contiennent 1 sont respectivement égaux à :

A $n-1$ et $\dfrac{n+2}{3}$ B n et $\dfrac{n-1}{2}$ C $n-1$ et $\dfrac{n+1}{3}$
D aucune des autres réponses proposées, en général E $n-1$ et $\dfrac{n-1}{2}$

☐ **M64** Le nombre de triplets qui composent le système de Steiner T vaut :

$\boxed{\text{A}}$ $\dfrac{n-1}{2}$ $\qquad$ $\dfrac{n+1}{2}$ $\qquad$ $\boxed{\text{C}}$ $\dfrac{n(n-1)}{6}$ $\qquad$ $\boxed{\text{D}}$ $\dfrac{n+2}{3}$ $\qquad$ $\boxed{\text{E}}$ $n-1$

$\triangle$ **L7** Parmi les entiers p tels que $3 \leqslant p \leqslant 10$, préciser ceux pour lesquels E_p possède un système de Steiner.