☙ Évaluation TeSciA session 15 mars 2025 ❧

Mathématiques Générales Avancées Épreuve 2 , option B

Durée : 1h 30 min

FONCTIONNEMENT DES QUESTIONS

- Les questions à *choix multiples* sont numérotées M1, M2, etc. Le candidat y répond en **noircissant** la case correspondant à sa réponse dans la feuille-réponse □.

Pour chacune de ces questions, il y a une et une seule bonne réponse.
Toute réponse fausse retire des points aux candidats.
Noircir plusieurs réponses à une même question a un effet de neutralisation (le candidat récoltera 0 point).

- Les questions *à réponse brute* sont numérotées L1, L2 etc.

Elles ne demandent aucune justification : les résultats sont reportés par le candidat dans le cadre correspondant sur la feuille-réponse △. Tout débordement de cadre est interdit.

- Les questions *à réponse rédigée* sont numérotées RI, R2, etc. Elles sont écrites dans le cadre correspondant sur la feuille-réponse ◯ ou la feuille-réponse △, selon le symbole précédant le numéro de la question. Tout débordement de cadre est interdit.

CONSEILS DE BON SENS

- L'énoncé est (très) long : il n'est absolument pas nécessaire d'avoir tout traité pour avoir une note et un classement excellents.
- Ne vous précipitez pas pour reporter vos réponses, notamment aux questions à choix multiples. Il est préférable d'avoir terminé un exercice avant d'en reporter les réponses.
- Ne répondez jamais au hasard à une question à choix multiples !
- Selon l'exercice, les questions peuvent être dépendantes les unes des autres ou non. Soyez attentifs à la variété des situations.

Exercice 1. Calcul algébrique, équations et inéquations

☐ **M1** L'expression $\sqrt{\dfrac{3}{5}} \times \sqrt{\dfrac{24}{5}}$ sans radicaux au dénominateur est :

A $\dfrac{2\sqrt{15}}{5}$ B $\dfrac{2\sqrt{6}}{5}$ C $\dfrac{6\sqrt{10}}{5}$ D $\dfrac{6\sqrt{2}}{5}$ E $\dfrac{3\sqrt{10}}{5}$

☐ **M2** Quand le réel x parcourt l'intervalle $]3\ ;\ +\infty[$, le réel $\dfrac{2x-3}{1-x}$ parcourt l'intervalle :

A $\left]-2\ ;\ -\dfrac{5}{3}\right[$ B $\left]-1\ ;\ \dfrac{3}{2}\right[$ C $\left]-1\ ;\ -\dfrac{1}{2}\right[$ D $\left]-2\ ;\ -\dfrac{3}{2}\right[$ E $]-\infty\ ;\ -2[$

☐ **M3** Pour deux réels x et y, l'égalité $(x-y)^2 = (1+x^2)(1+y^2)$ est réalisée si et seulement si :

A $xy < 0$ B $xy = 1$ C $x > 0$ et $y > 0$ D $x > 0$ et $y < 0$ E $xy = -1$

☐ **M4** L'ensemble des solutions de l'inéquation $\dfrac{2x-3}{x+1} + \dfrac{3}{x-1} < \dfrac{2x^2}{x^2-1}$ est :

A $\left]-1\ ;\ -\dfrac{1}{2}\right[\cup]1\ ;\ 5[$ B $]-1\ ;\ 1[\cup]3\ ;\ +\infty[$ C $]-\infty\ ;\ -1[\cup]1\ ;\ 3[$ D aucune des autres réponses proposées E $\left]-\dfrac{1}{2}\ ;\ 1\right[$

☐ **M5** L'ensemble des solutions de l'équation $1 + \left(\dfrac{x+1}{x-1}\right) + \left(\dfrac{x+1}{x-1}\right)^2 + \left(\dfrac{x+1}{x-1}\right)^3 = 0$ est :

A $\varnothing$ B $\{0\ ;\ 2\}$ C $\{0\}$ D aucune des autres réponses proposées E $\{0\ ;\ 1\}$

☐ **M6** L'ensemble des solutions de l'inéquation $\sqrt{x^2+21} \geqslant x-7$ est :

A $\varnothing$ B $\mathbb{R}$ C $[2\ ;\ +\infty[$ D $\left]\dfrac{1}{3}\ ;\ +\infty\right[$ E $[7\ ;\ +\infty[$

☐ **M7** La valeur de $\dfrac{7}{16}\ln(3+2\sqrt{2}) - 4\ln(\sqrt{2}+1) - \dfrac{25}{8}\ln(\sqrt{2}-1)$ est :

A 1 B $-\dfrac{1}{8}\ln(\sqrt{2}-1)$ C $\dfrac{1}{8}\ln(\sqrt{2}+1)$ D $\dfrac{1}{16}\ln(2\sqrt{2}+3)$ E 0

△ **L1** Donner le domaine de définition et une expression simplifiée de $A(x) = \sqrt{x-2\sqrt{x-1}} + \sqrt{x+2\sqrt{x-1}}$.

☐ **M8** Soit m un nombre réel. Le nombre de solutions de $\mathrm{e}^{2x} - 2m\mathrm{e}^{x} + 1 = 0$ est :

A $\begin{cases} 0 & \text{si } |m-1| < 1 \\ 1 & \text{si } |m-1| = 1 \\ 2 & \text{si } |m-1| > 1 \end{cases}$ B $\begin{cases} 0 & \text{si } -1 < m < 2 \\ 1 & \text{si } m = -1 \text{ ou } 2 \\ 2 & \text{si } m > 2 \text{ ou } m < -1 \end{cases}$ C $\begin{cases} 0 & \text{si } m < 1 \\ 1 & \text{si } m = 1 \\ 2 & \text{si } m > 1 \end{cases}$

D $\begin{cases} 0 & \text{si } m < -1 \\ 1 & \text{si } m = -1 \\ 2 & \text{si } m > -1 \end{cases}$ E $\begin{cases} 0 & \text{si } |m| < 1 \\ 1 & \text{si } |m| = 1 \\ 2 & \text{si } |m| > 1 \end{cases}$

Exercice 2. Différence symétrique d'ensembles

Pour deux ensembles A_1 et A_2, on note $A_1\Delta A_2$ l'ensemble formé des objets x qui appartiennent à A_1 mais pas à A_2 et des objets x qui appartiennent à A_2 mais pas à A_1. On dit que $A_1\Delta A_2$ est la **différence symétrique** de A_1 et A_2 (dans cet ordre).
Par exemple :

- pour $A_1 = \{1\ ;\ 2\ ;\ 4\}$ et $A_2 = \{1\ ;\ 2\ ;\ 3\}$, on a $A_1\Delta A_2 = \{3\ ;\ 4\}$;
- pour l'ensemble B formé des élèves Léa, Paul et Séverine, et l'ensemble C formé des élèves Paul et Mathilde, l'ensemble $B\Delta C$ est formé des élèves Léa, Mathilde et Séverine, autrement dit $B\Delta C = \{\text{Léa}\ ,\ \text{Mathilde}\ ,\ \text{Séverine}\}$.

On rappelle aussi que $A_1 \cap A_2$ désigne l'ensemble des objets qui appartiennent à la fois à A_1 et à A_2. Dans le premier exemple ci-dessus, on a donc $A_1 \cap A_2 = \{1\ ;\ 2\}$, et dans le deuxième $B \cap C = \{\text{Paul}\}$.
On note $\varnothing$ l'ensemble vide.

Propriétés élémentaires de la différence symétrique

△ **L2** Donner la différence symétrique des ensembles $\mathbb{R}_-$ et $\mathbb{Z}$.

☐ **M9** Vrai ou Faux ? ON a $A\Delta B = B\Delta A$

A Vrai B Faux C Cette affirmation n'a pas de sens

☐ **M10** Pour tout ensemble A, la différence symétrique de $A\Delta A$ est égale à :

A A B $\varnothing$ C aucune des autres réponses

☐ **M11** Pour tout ensemble A, la différence symétrique de $A\Delta\varnothing$ est égale à :

A A B $\varnothing$ C aucune des autres réponses

☐ **M12** Pour tout ensemble A, l'ensemble $(A\Delta A)\Delta A$ est égal à :

A A B $\varnothing$ C aucune des autres réponses

☐ **M13** Pour deux ensembles A et B, une condition équivalente au fait que $A\Delta B$ soit vide est :

A A est vide B $A = B$ C aucune des autres réponses D A et B sont vides E B est vide

☐ **M14** Pour deux ensembles A et B, si tout élément de $A\Delta B$ est élément de A alors on peut affirmer que :

A B est vide B tout élément de B est élément de A C $A\Delta B$ est vide

D tout élément de A est élément de B E aucune des autres affirmations proposées ne peut être soutenue

☐ **M15** Pour deux ensembles A et B, si $A\Delta B$ possède exactement un élément alors on peut affirmer que :

A A est vide B ou bien tout élément de A est élément de B, ou bien tout élément de B est élément de A C B est vide

D tout élément de A est élément de B E aucune des autres affirmations proposées ne peut être soutenue

◯ **R1** Justifier votre réponse à la question **M15**.

☐ **M16** Soit A et B deux ensembles. Laquelle des propositions suivantes est vraie ?

A Il existe toujours un et un seul ensemble X tel que $A\Delta X = B$

B Il existe toujours plusieurs ensembles X tel que $A\Delta X = B$

C Il existe toujours au moins un ensemble X tel que $A\Delta X = B$, mais il peut n'en exister qu'un seul ou plusieurs, selon le choix de A et B

D Il peut ne pas exister d'ensemble X tel que $A\Delta X = B$, selon le choix de A et B

☐ **M17** On introduit deux égalités qui peuvent être vraies ou non :

(i) $(A\Delta B)\cap C = (A\cap C)\Delta(B\cap C)$

(ii) $(A\cap B)\Delta C = (A\Delta C)\cap(B\Delta C)$

Lesquelles sont vraies indépendamment du choix des ensembles A, B et C ?

A (i) mais pas (ii) B les deux C (ii) mais pas (i) D aucune des deux

Différence symétrique et finitude

Pour tout ensemble fini A, on note $c(A)$ le nombre de ses éléments (aussi appelé son cardinal).

☐ **M18** On introduit trois implications, qui peuvent être vraies ou non :

(i) Si A et B sont finis alors $A\Delta B$ est fini.

(ii) Si $A\Delta B$ est fini alors A et B sont finis.

(iii) Si $A\Delta B$ et A sont finis alors B est fini.

Parmi ces implications, lesquelles sont vraies indépendamment du choix des ensembles A et B ?

A toutes sauf (iii) B toutes sauf (ii) C les trois D une seule E toutes sauf (i)

☐ **M19** Soit A et B deux ensembles finis tels que $A\Delta B$ soit fini. le nombre $c(A\Delta B)$ vaut alors systématiquement :

A $c(A)+c(B)-2c(A\cap B)$ B $c(A)+c(B)-c(A\cap B)$ C $c(A)+c(B)$

D $\dfrac{c(A)c(B)}{c(A\cap B)}$ E aucune des autres valeurs proposées, en général

☐ **M20** Quels que soient les ensembles finis A et B tels que $A\Delta B$ soit fini et $c(B)$ soit impair :

A $c(A\Delta B)$ est pair

B $c(A\Delta B)$ est impair

C $c(A\Delta B)$ n'a pas la même parité que $c(A)$

D $c(A\Delta B)$ a la même parité que $c(A)$

E on ne peut pas statuer sur la parité de $c(A\Delta B)$, même en connaissant celle de A

Différence symétrique itérée

☐ **M21** Soit A_1, A_2 et A_3 des ensembles. Pour un objet x, on note $n(x)$ le nombre d'entiers i dans $\{1 ; 2 ; 3\}$ tels que x appartienne à A_i. L'appartenance de x à $(A_1\Delta A_2)\Delta A_3$ est alors équivalente à la condition :

A $n(x)=1$ B $n(x)$ est pair C $n(x)$ est impair

D $n(x)=2$ E aucune des autres réponses proposées en général

◯ **R2** En utilisant le résultat de la question **M21**, et en le combinant avec d'autres résultats antérieurs (dont on citera alors les numéros des questions), démontrer que $(A\Delta B)\Delta C = A\Delta(B\Delta C)$ quels que soient les ensembles A, B et C.

Le résultat de **R2** permet de définir sans ambiguïté $A_1\Delta\ldots\Delta A_n$ pour n'importe quelle liste d'ensembles $(A_1,\ldots,A_n)$, sans tenir compte de l'ordre de parenthésage. Par exemple $A_1\Delta A_2\Delta A_3\Delta A_4$ peut être défini comme $(((A_1\Delta A_2)\Delta A_3)\Delta A_4)$ mais aussi comme $A_1\Delta((A_2\Delta A_3)\Delta A_4)$, ce qui fournit le même résultat.

☐ **M22** On note $A = \{1\ ;\ i\}$ pour tout entier naturel $i \geqslant 1$. L'ensemble $A_1\Delta\ldots\Delta A_{2025}$ est alors égal à :

A $\{0\ ;\ 2\ ;\ \ldots\ ;\ 2025\}$

B $\varnothing$

C $\{0\ ;\ 1\ ;\ 2\ ;\ \ldots\ ;\ 2025\}$

D $\{1\ ;\ 2\ ;\ \ldots\ ;\ 2025\}$

E aucune des autres réponses proposées

☐ **M23** Soit $A_1,\ldots,A_p$ des ensembles, où $p \geqslant 4$. Pour un objet x, on note $n(x)$ le nombre d'entiers i dans $\{1\ ;\ 2\ ;\ldots\ ;\ p\}$ tels que x appartienne à A_i. L'appartenance de x à $A_1\Delta\ldots\Delta A_p$ est alors équivalente à la condition :

A $n(x)$ est impair

B $n(x) = 1$

C $n(x) = p-1$

D $n(x)$ a la même parité que p

E aucune des autres réponses proposées, en général

Classe stables

On appelle **classe** tout ensemble fini non vide dont les éléments sont eux-mêmes des ensembles finis. Par exemple, l'ensemble $\mathscr{C} = \{\{1\ ;\ 2\ ;\ 3\};\{1\ ;\ 3\ ;\ 5\};\varnothing\}$ est une classe dont les éléments sont $\{1\ ;\ 2\ ;\ 3\}$, $\{1\ ;\ 3\ ;\ 5\}$ et l'ensemble vide (tous finis). Dans ce qui suit„ les classes sont systématiquement représentées par des majuscules calligraphiées, par exemple $\mathscr{A}$, $\mathscr{B}$, $\mathscr{C}$, et leurs éléments sont représentés par des majuscules d'imprimerie, par exemple A, B, C.

Une classe est dite **stable** lorsque, quels que soient les éléments A et B de $\mathscr{C}$, l'objet $A\Delta B$ est un élément de $\mathscr{C}$.

Par exemple, la classe $\{\{1\ ;\ 2\ ;\ 3\};\{1\ ;\ 2\ ;\ 4\}\}$ n'est pas stable car $\{1\ ;\ 2\ ;\ 3\}\Delta\{1\ ;\ 2\ ;\ 4\}$, qui vaut $\{3\ ;\ 4\}$, n'en est pas un élément.

☐ **M24** Parmi les ensembles suivants, combien sont des classes stables?
$\mathscr{A} = \{\{1\ ;\ 2\ ;\ 3\};\varnothing\}$, $\mathscr{B} = \{\varnothing\}$, $\mathscr{C} = \{\{1\ ;\ 2\ ;\ 3\}\}$, $\mathscr{D} = \varnothing$.

A aucun

B un

C deux

D trois

E quatre

On rappelle que pour tout ensemble A, un **sous-ensemble** de A est un ensemble B tel que tout élément de B soit élément de A. Par exemple, $\varnothing$ et A sont deux sous-ensembles de A.

☐ **M25** Pour un ensemble fini X, l'ensemble constitué de tous les sous-ensembles de X :

A est toujours une classe stable

B n'est pas toujours une classe

C est toujours une classe, mais n'est pas toujours stable

☐ **M26** Soit X un ensemble fini et Y un sous-ensemble de X. On considère l'ensemble $\mathscr{C}$ des sous-ensembles Z de X tel que Y soit un sous-ensemble de Z. Alors $\mathscr{C}$:

A est toujours une classe stable

B n'est pas toujours une classe

C est toujours une classe, mais n'est pas toujours stable

☐ **M27** Soit X un ensemble fini. On considère :

- L'ensemble $\mathscr{C}$ formé de tous les sous-ensembles de X ayant un nombre pair d'éléments.
- L'ensemble $\mathscr{D}$ formé de tous les sous-ensembles de X ayant un nombre impair d'éléments.

Lesquels sont des classes stables quel que soit le choix de X?

A $\mathscr{D}$

B $\mathscr{C}$

C $\mathscr{C}$ et $\mathscr{D}$

D aucun d'entre eux

☐ **M28** Soit $\mathscr{C}$ et $\mathscr{D}$ deux classes stables. On considère la différence symétrique $\mathscr{C}\Delta\mathscr{D}$ et l'intersection $\mathscr{C}\cap\mathscr{D}$. Lesquelles sont des classes stables quel que soit le choix de $\mathscr{C}$ et $\mathscr{D}$?

$\boxed{\text{A}}$ $\mathscr{C}\cap\mathscr{D}$ $\boxed{\text{B}}$ $\mathscr{C}\cap\mathscr{D}$ et $\mathscr{C}\Delta\mathscr{D}$ $\boxed{\text{C}}$ $\mathscr{C}\Delta\mathscr{D}$ $\boxed{\text{D}}$ aucune d'entre elles

☐ **M29** Soit $\mathscr{C}$ et $\mathscr{D}$ deux classes stables. On considère les ensembles suivants :

- L'ensemble $\mathscr{E}$ constitué de toutes les différence symétrique $C\Delta D$, avec C élément de $\mathscr{C}$ et D élément de $\mathscr{D}$.
- L'ensemble $\mathscr{F}$ constitué de toutes les intersections $C\cap D$ avec C élément de $\mathscr{C}$ et D élément de $\mathscr{D}$.

Lesquels sont des classes stables quel que soit le choix de $\mathscr{C}$ et $\mathscr{D}$?

$\boxed{\text{A}}$ $\mathscr{F}$ $\boxed{\text{B}}$ $\mathscr{E}$ et $\mathscr{F}$ $\boxed{\text{C}}$ $\mathscr{E}$ $\boxed{\text{D}}$ aucune d'entre eux

---

Exercice 3. Une suite définit par récurrence

On s'intéresse dans cet exercice aux suites réelles $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifiant la relation de récurrence $u_{n+1} = |u_n - n|$ pour tout entier naturel n.
On fixe une telle suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tout au long de l'exercice.

Le cas particulier $u_0 = 0$

☐ **M29** Si $u_0 = 0$ alors u_8 vaut :

$\boxed{\text{A}}$ 0 $\boxed{\text{B}}$ 1 $\boxed{\text{C}}$ 2 $\boxed{\text{D}}$ 4 $\boxed{\text{E}}$ 6

△ **L3** On suppose dans cette question que $u_0 = 0$. Quelle conjecture peut-on, formuler sur la valeur du couple $(u_{2n}\ ;\ u_{2n+1})$ en fonction de n ?

Le cas général

☐ **M31** Vrai ou Faux ? La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ a une limite finie.

$\boxed{\text{A}}$ Vrai $\boxed{\text{B}}$ Faux

☐ **M32** Si la suite $\left(\dfrac{u_n}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ a une limite finie alors cette limite est égale à :

$\boxed{\text{A}}$ $\dfrac{1}{2}$ $\boxed{\text{B}}$ -1 $\boxed{\text{C}}$ 2 $\boxed{\text{D}}$ 1 $\boxed{\text{E}}$ 0

☐ **M33** La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est :

$\boxed{\text{A}}$ périodique $\boxed{\text{B}}$ non bornée $\boxed{\text{C}}$ bornée $\boxed{\text{D}}$ de limite nulle $\boxed{\text{E}}$ de limite $\dfrac{n}{2}$

◯ **R3** Justifier votre réponse à la question **R33**.

☐ **M34** On fait l'hypothèse qu'il existe un entier N tels que $u_{\geqslant} n$. La conséquence la plus immédiate que l'on peut alors en tirer est qu'il existe une constante K telle que :

A $u_n = K + \dfrac{n^2}{2}$ pour tout entier $n \geqslant N$

B $u_n = K - \dfrac{n(n-1)}{2}$ pour tout entier $n \geqslant N$

C $u_n = K - \dfrac{n^2}{2}$ pour tout entier $n \geqslant N$

D $u_n = K - \dfrac{n}{2}$ pour tout entier $n \geqslant N$

E $u_n = K + \dfrac{n(n-1)}{2}$ pour tout entier $n \geqslant N$

☐ **M35** Vrai ou Faux ? Il existe un entier naturel N tel que $u_n \geqslant n$ pour tout entier $n \geqslant N$.

A Vrai B Faux

À partir de maintenant et dans toutes les questions suivantes, on suppose que, pour tout entier naturel N, il existe un entier $n \geqslant N$ tel que $u_n < n$.

☐ **M35** Laquelle des affirmations est vraie ?

A La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne peut être arithmétique.

B La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ peut être arithmétique, et dans ce cas sa raison est nécessairement $\dfrac{1}{2}$.

C La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ peut être arithmétique, et dans ce cas sa raison est nécessairement $-\dfrac{1}{2}$.

D La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ peut être arithmétique, et dans ce cas sa raison est nécessairement $\dfrac{1}{2}$ ou$-\dfrac{1}{2}$, selon les cas.

E Aucune des autres réponses proposées n'est vraie.

On suppose dans la suite qu'il existe un entier $p > 0$ tel que $u_p < p$, et on en fixe un définitivement.

◯ **R4** Montrer que $u_n < n$ pour tout entier $n \geqslant p$.

☐ **M37** Pour tout entier $n \geqslant p$, le terme u_{n+2} est égal à :

A $u_n - 1$ B u_{n+1} C $u_n + 1$ D u_n E $-u_n + 1$

☐ **M38** Pour tout entier naturel n, on définit $\alpha_n = u_n - \dfrac{n}{2} + \dfrac{1}{4}$. Alors, pour tout entier $n \geqslant p$, le terme α_{n+1} vaut :

A $\alpha_n + \dfrac{1}{4}$ B $\alpha_n - \dfrac{1}{4}$ C α_n D $-\alpha_n + \dfrac{1}{4}$ E $-\alpha_n$

☐ **M39** On peut donc conclure à l'existence d'un réel C tel que, pour tout entier $n \geqslant p$:

A $u_n = \dfrac{n}{2} + C^n$

B $u_n = \dfrac{n}{2} - \dfrac{1}{4} + (-1)^n C$

C $u_n = \dfrac{n}{2} + \dfrac{1}{4} + (-1)^n C$

D $u_n = -\dfrac{n}{2} + \dfrac{1}{4} + (-1)^n C$

E $u_n = \dfrac{n}{2} + (-1)^n C$

Exercice 4. Détection de réels par des suites d'entiers

On fixe un objet mathématique qui n'est pas un nombre réel, et on le note $+\infty$ (sa nature profonde n'a pas d'importance dans la suite). On note $]1\ ;\ +\infty]$ l'ensemble formé de $+\infty$ et des réels strictement supérieurs à 1.
Pour un élément x de $]1\,;+\infty\,]$:

- ou bien x est réel et on note $E(x)$ l'unique entier naturel tel que $k \leqslant x < k+1$ (autrement dit, la partie entière de x) ;
- ou bien $x = +\infty$ et on pose $E(x) = +\infty$.

Pour un élément x de $]1\,;+\infty\,]$, on définit un objet x' comme suit :

- $x' = \dfrac{1}{x - E(x)}$ si x est réel mais pas entier ;
- $x' = +\infty$ dans tout autre cas.

On rappelle enfin qu'un nombre rationnel est un nombre de la forme $\dfrac{a}{b}$, où a et b sont des entiers relatifs dont $b \neq 0$.
On admet que tout rationnel r possède une unique écriture sous la forme $r = \dfrac{p}{q}$ où p est un entier relatif et q un entier naturel non nul tels que p et q n'aient aucun diviseur premier commun : on dit qu'il s'agit de l'écriture de r sous forme irréductible.

Considérations élémentaires sur la transformation $x \mapsto x'$

☐ **M40** Vrai ou Faux ? L'objet x' est dans $]-1\ ;\ +\infty]$ quel que soit x dans $]-1\ ;\ +\infty]$.

$\boxed{\text{A}}$ Vrai $\boxed{\text{B}}$ Faux

☐ **M41** On donne les quatre affirmations :

(i) Si x est un entier alors x' n'est pas un entier.
(ii) Si x est un entier alors x' est un entier.
(iii) Si x n'est pas un entier alors x' n'est pas un entier.
(iv) Si x n'est pas un entier alors x' est un entier.

Combien sont vraies indépendamment du choix de x dans $]-1\ ;\ +\infty]$?

$\boxed{\text{A}}$ 0 $\boxed{\text{B}}$ 1 $\boxed{\text{C}}$ 2 $\boxed{\text{D}}$ 3 $\boxed{\text{E}}$ 4

△ **L4** Donner sans justifications les x dans $]-1\ ;\ +\infty]$ pour lesquels $x = x'$.

☐ **M42** On donne quatre affirmations :

(i) Si x est rationnel alors x' est un rationnel.
(ii) Si x est rationnel alors x' n'est pas un rationnel.
(iii) Si x n'est pas rationnel alors x' n'est pas un rationnel.
(iv) Si x n'est pas rationnel alors x' est un rationnel

Laquelle est vraie indépendamment du choix de x dans $]-1\ ;\ +\infty]$?

$\boxed{\text{A}}$ (i) $\boxed{\text{B}}$ (ii) $\boxed{\text{C}}$ (iii) $\boxed{\text{D}}$ (iv) $\boxed{\text{E}}$ Aucune d'entre elles

Itérations de l'opération prime, suite de parties entières

On part d'un élément x de $]-1\ ;\ +\infty]$. On construit une suite $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de $]-1\ ;\ +\infty]$ par récurrence en posant $r_0 = x$ et en imposant, pour tout entier naturel n, la relation $r_{n+1} = (r_n)'$.
On construit alors en parallèle la suite $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en posant $c_n = E(r_n)$ pour tout entier naturel n.
Par exemple, pour $x = \dfrac{3}{2}$, on a $r_0 = \dfrac{3}{2}$, $r_1 = 2$, $r_2 = +\infty$, etc., et $c_0 = 1$, $c_1 = 2$, $c_2 = +\infty$, etc.

☐ **M43** On suppose que $x = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$. Alors c_{2025} vaut :

$\boxed{\text{A}}$ 0 $\boxed{\text{B}}$ 1 $\boxed{\text{C}}$ 2 $\boxed{\text{D}}$ 3 $\boxed{\text{E}}$ $+\infty$

☐ **M44** On suppose que $x = \sqrt{3}$. Alors c_{2025} vaut :

$\boxed{\text{A}}$ 0 $\boxed{\text{B}}$ 1 $\boxed{\text{C}}$ 2 $\boxed{\text{D}}$ 4 $\boxed{\text{E}}$ $+\infty$

△ **L5** On suppose que $c_7 = +\infty$ et $c_6 = 2$. Que vaut r_6 ?

☐ **M45** On suppose que $c_7 = +\infty$, que $c_i = 2$ pour tout entier pair i compris entre 0 et 6, et que $c_i = 1$ pour tout entier impair i compris entre 0 et 6. Alors x vaut :

$\boxed{\text{A}}$ $\dfrac{194}{71}$ $\boxed{\text{B}}$ $\dfrac{112}{41}$ $\boxed{\text{C}}$ $\dfrac{153}{56}$ $\boxed{\text{D}}$ $\dfrac{41}{15}$ $\boxed{\text{E}}$ il n'y a pas assez d'informations pour le savoir

☐ **M46** On se donne une liste $(d_0\ ;\ \dots\ ;\ d_p)$ d'entiers naturels non nuls. On dit que x est adapté à cette liste lorsque $c_k = d_k$ pour tout entier k compris entre 0 et p, et $c_{p+1} = +\infty$. On introduit plusieurs affirmations :

(i) S'il existe un nombre réel $x > 1$ adapté à $(d_0\ ;\ \dots\ ;\ d_p)$ alors $d_p \neq 1$.
(ii) Si $d_p \neq 1$ alors il existe un nombre réel $x > 1$ adapté à $(d_0\ ;\ \dots\ ;\ d_p)$.

Lesquelles sont vraies indépendamment du choix de $(d_0\ ;\ \dots\ ;\ d_p)$?

$\boxed{\text{A}}$ (i) $\boxed{\text{B}}$ (ii) $\boxed{\text{C}}$ Toutes $\boxed{\text{D}}$ Aucune

Terminaison pour les rationnels

Pour tout nombre rationnel positif x, que l'on écrit sous forme irréductible $x = \dfrac{p}{q}$, l'entier $p+q$ est appelé **poids** de x.

☐ **M47** Soit x un rationnel strictement supérieur à 1 tel que x' soit rationnel. On note $x = \dfrac{p}{q}$ son écriture sous forme irréductible. On introduit des affirmations :

(i) L'écriture sous forme irréductible de x' a q pour numérateur.
(ii) Le poids de x' est strictement inférieur à celui de x.

Lesquelles sont vraies ?

$\boxed{\text{A}}$ (i) $\boxed{\text{B}}$ (ii) $\boxed{\text{C}}$ Toutes $\boxed{\text{D}}$ Aucune

☐ **M48** On donne deux implications :

(i) Si x est rationnel ou vaut $+\infty$ alors il existe un entier naturel n tel que $r_n = +\infty$.
(ii) S'il existe un entier naturel n tel que $r_n = +\infty$ alors x est rationnel ou vaut $+\infty$.

Lesquelles sont vraies ?

$\boxed{\text{A}}$ (i) $\boxed{\text{B}}$ (ii) $\boxed{\text{C}}$ Toutes $\boxed{\text{D}}$ Aucune

Caractérisation par la suite des parties entières

On reprend la construction précédente. Cette fois-ci, on suppose plus précisément que x n'est ni un nombre rationnel ni $+\infty$. On se propose dans ce cas de démontrer que la connaissance de la suite $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ suffit à reconstituer x. Pour clarifier le discours, on notera désormais $c_n(x)$ le terme de rang n de cette suite, afin de marquer la dépendance envers x. De même, on notera $r_n(x)$ le terme de rang n de la suite $(r_k)_{k\in\mathbb{N}}$ afin de bien marquer sa dépendance envers x.

△ **R5** Soit x et y deux nombres non rationnels dans $]1\ ;\ +\infty[$. On suppose que $c_0(x) = c_0(y)$ et $c_1(x) = c_1(y)$. Démontrer qu'il existe des entiers naturels non nuls a, b, c, d tels que $x = \dfrac{ar_2(x)+b}{cr_2(x)+d}$ et $y = \dfrac{ar_2(y)+b}{cr_2(y)+d}$, et en déduire que $|x-y| \leqslant \dfrac{|r_2(x)-r_2(y)|}{4}$.

☐ **M49** Soit x et y deux nombres réels strictement supérieurs à 1. On suppose trouvé un entier naturel n tel que $c_k(x) = c_k(y)$ pour tout entier k compris entre 0 et $2n$.
Quelle affirmation la plus précise peut-on déduire de cette hypothèse, par application directe de résultats antérieurs?

A $|x-y| \leqslant \dfrac{1}{2^n}$ B $|x-y| \leqslant \dfrac{1}{4^n}$ C $|x-y| \leqslant \dfrac{1}{2^{n+1}}$

D $|x-y| \leqslant \dfrac{1}{4^{n+1}}$ E aucune des autres réponse proposées

---

Exercice 5. Records d'une permutation

Dans tout l'exercice, on fixe un entier naturel n supérieur ou égal à 3.

On appelle **permutation** de $\{1\ ;\ 2\ ;\ \ldots\ ;\ n\}$ toute liste (ordonnée) $(i_1\ ;\ i_2\ ;\ \ldots\ i_n)$ dans laquelle chaque entier de 1 à n est représenté exactement une fois. Pour la liste $\sigma = (i_1\ ;\ i_2\ ;\ \ldots\ i_n)$, on écrit aussi $\sigma(k) = i_k$. Par exemple, pour $n = 4$ la liste $\sigma = (4\ ;\ 3\ ;\ 1\ ;\ 2)$ est une permutation de $\{1\ ;\ 2\ ;\ 3\ ;\ 4\}$ et $\sigma(3) = 1$ et $\sigma(4) = 2$.

On dit qu'une permutation σ de $\{1\ ;\ 2\ ;\ \ldots\ ;\ n\}$ présente un **record en position** i (où $i \in \{1\ ;\ 2\ ;\ \ldots\ ;\ n\}$) si $i = 1$ ou si $i > 1$ et $\sigma(i)$ est le plus grand des nombres $\sigma(1\ ;\ \sigma(2)\ ;\ldots\ ;\ \sigma(i)$. On notre $\mathscr{R}(\sigma)$ le nombre record de la permutation σ.

Par exemple, pour $n = 6$ et $\sigma = (4\ ;\ 3\ ;\ 1\ ;\ 6\ ;\ 2\ ;\ 5)$, la permutation σ a exactement 2 records, en position 1 et 4 (ainsi $\mathscr{R}(\sigma) = 2$).

Ou encore, pour $n = 7$ et $\sigma = (2\ ;\ 3;\ 5\ ;\ 1\ ;\ 4\ ;\ 7\ ;\ 6)$, la permutation σ a exactement 4 records en positions 1, 2, 3 et 6. (ainsi $\mathscr{R}(\sigma) = 4$).

Le cas $n = 3$

△ **L6** Donner toutes les permutations de $\{1\ ;\ 2\ ;\ 3\}$.

Le cas $n = 4$

Dans cette partie on étudie le cas $n = 4$.

☐ **M50** Le nombre de permutations de $\{1\ ;\ 2\ ;\ 3\ ;\ 4\}$ est :

A 6 B 16 C 24 D 256 E aucune des autres réponses

☐ **M51** Le nombre de permutations σ de $\{1\ ;\ 2\ ;\ 3\ ;\ 4\}$ telle que $\mathscr{R}(\sigma) = 4$ est :

A 1 B 2 C 3 D 6 E 11

☐ **M52** Le nombre de permutations σ de $\{1\ ;\ 2\ ;\ 3\ ;\ 4\}$ telle que $\mathscr{R}(\sigma) = 1$ est :

A 1 B 2 C 3 D 6 E 11

△ **L7** Donner les permutations σ de $\{1\ ;\ 2\ ;\ 3\ ;\ 4\}$ telle que $\mathscr{R}(\sigma) = 3$.

☐ **M53** Le nombre de permutations σ de $\{1\ ;\ 2\ ;\ 3\ ;\ 4\}$ telle que $\mathscr{R}(\sigma) = 2$ est :

A 1 B 2 C 3 D 6 E 11

Le cas $n \geqslant 4$

☐ **M54** Le nombre de permutations de $\{1\ ;\ 2\ ;\ \dots\ ;\ n\}$ est :

A $n\,!$ B 2^n C 2^{n+1} D n^n E aucune des autres réponses

☐ **M55** Le nombre de permutations de $\{1\ ;\ 2\ ;\ \dots\ ;\ n\}$ ayant n records est :

A 1 B n C 2^n D 2^{n-1} E aucune des autres réponses

☐ **M56** Le nombre de permutations de $\{1\ ;\ 2\ ;\ \dots\ ;\ n\}$ n'ayant qu'un seul record est :

A $n+2$ B $2(n-1)$ C $(n-1)\,!$ D $2^{n-1}-2$ E $\dfrac{n(n-1)}{2}$

Permutations ayant $n-1$ records

☐ **M57** Pour toute permutation σ de $\{1\ ;\ 2\ ;\ \dots\ ;\ n\}$ ayant exactement $n-1$ records, on a :

A $\sigma(n-1) = n$ ou $\sigma(n) = n$ B $\sigma(n) = n-1$ C $\sigma(n) < n-1$

D $\sigma(n) = 1$ E $\sigma(n) = n$ ou $\sigma(n) = n-1$

☐ **M58** Le nombre de permutations σ de $\{1\ ;\ 2\ ;\ \dots\ ;\ n\}$ ayant exactement $n-1$ records et telles que $\sigma(n-1) = n$ est :

A 1 B $(n-2)\,!$ C n D $n-1$ E 0

☐ **M59** Le nombre de permutations σ de $\{1\ ;\ 2\ ;\ \dots\ ;\ n\}$ ayant exactement $n-1$ records et telles que $\sigma(n) = n$ et $\sigma(1) \neq 1$ est :

A 1 B $n-2$ C n D $n-1$ E 0

☐ **M60** Soit k un élément de $\{2\ ;\ \ldots\ ;\ n-1\}$. Le nombre de permutations σ de $\{1\ ;\ 2\ ;\ \ldots\ ;\ n\}$ ayant exactement $n-1$ records et telles que $\sigma(n)=n$, $\sigma(1)=1$ et n'ayant pas de record en position k est :

A 1 B $k-2$ C $n-1$ D $1+2+\ldots+(k-1)$ E $1+2+\ldots+(n-1)$

☐ **M61** Le nombre de permutations σ de $\{1\ ;\ 2\ ;\ \ldots\ ;\ n\}$ ayant exactement $n-1$ records et telles que $\sigma(n)=n$ et $\sigma(1)=1$ est :

A 1 B $n-2$ C $n-1$ D $\dfrac{n^2-3n-2}{2}$ E $\dfrac{n^2-5n+6}{2}$

△ **L8** Donner le nombre de permutations de $\{1\ ;\ 2\ ;\ \ldots\ ;\ n\}$ ayant exactement $n-1$ records.

Permutations ayant 2 records

☐ **M62** Soit p un élément de $\{2\ ;\ \ldots\ ;\ n\}$. Le nombre de p-listes $(k_1\ ;\ k_2\ ;\ \ldots\ ;\ k_p)$ d'éléments distincts de $\{1\ ;\ 2\ ;\ \ldots\ ;\ n\}$ dont k_p est le plus grand élément vaut :

A n^{p-1} B $\dbinom{n}{p}$ C $\dfrac{n\,!}{(n-p)\,!}$ D $\dfrac{n\,!}{p(n-p)\,!}$ E $(p-1)\,!$

☐ **M63** Soit p un élément de $\{2\ ;\ \ldots\ ;\ n\}$. Le nombre de permutations de $\{1\ ;\ 2\ ;\ \ldots\ ;\ n\}$ dont ayant exactement deux records lesquels sont atteints en positions 1 et p, est :

A $\dfrac{1}{p}$ B $\dfrac{1}{p-1}$ C $\dfrac{(n-1)\,!}{p}$ D $\dfrac{(n-1)\,!}{(p-1)\,!}$ E $\dfrac{(n-1)\,!}{p-1}$

☐ **M64** Le nombre de permutations de $\{1\ ;\ 2\ ;\ \ldots\ ;\ n\}$ dont ayant exactement deux records est :

A $\dfrac{1}{2}+\ldots+\dfrac{1}{p}+\ldots+\dfrac{1}{n}$

B $(n-1)\,!\left(1+\dfrac{1}{2}+\ldots+\dfrac{1}{p}+\ldots+\dfrac{1}{n-1}\right)$

C $(n-1)\,!\left(\dfrac{1}{2}+\ldots+\dfrac{1}{p}+\ldots+\dfrac{1}{n}\right)$

D $1+\dfrac{1}{2\,!}+\ldots+\dfrac{1}{p\,!}+\ldots+\dfrac{1}{n\,!}$

E $1+\dfrac{1}{2}+\ldots+\dfrac{1}{p}+\ldots+\dfrac{1}{n-1}$

Une loi de probabilités sur l'ensemble des permutations de $\{1\ ;\ 2\ ;\ \ldots\ ;\ n\}$

On note $\mathscr{S}_n$ l'ensemble des permutations de $\{1\ ;\ 2\ ;\ \ldots\ ;\ n\}$. On le munit de la probabilité uniforme $\mathbf{P}$, c'est-à-dire que, pour toute permutation σ de $\mathscr{S}_n$, on a $\mathbf{P}(\{\sigma\})=\dfrac{1}{n\,!}$.

On définit une variable aléatoire $\mathscr{R}_n$, qui à toute permutation σ de $\mathscr{S}_n$ associe le nombre de records de σ.

On note, pour tout entier i de $\{1\ ;\ 2\ ;\ \ldots\ ;\ n\}$, $\mathscr{T}_i$ la variable aléatoire qui, à chaque permutation σ de $\mathscr{S}_n$, associe 1 si σ présente un record en position i, et 0 sinon. La variable aléatoire $\mathscr{T}_1$ est donc constante égale à 1.

☐ **M65** L'espérance de $\mathscr{R}_3$ est :

A $\dfrac{5}{3}$ B $\dfrac{4}{3}$ C $\dfrac{11}{6}$ D $\dfrac{7}{6}$ E 2

☐ **M66** La variance de $\mathscr{R}_3$ est :

A $\dfrac{19}{36}$ B $\dfrac{5}{54}$ C $\dfrac{7}{54}$ D $\dfrac{13}{36}$ E $\dfrac{17}{36}$

☐ **M67** Soit i un élément de $\{1\ ;\ 2\ ;\ \ldots\ ;\ n\}$. La probabilité $\mathbf{P}(T_i = 1) =$ vaut alors :

$\boxed{\text{A}}$ $\dfrac{1}{i}$ $\boxed{\text{B}}$ $\dfrac{1}{i+1}$ $\boxed{\text{C}}$ $\dfrac{1}{i\,!}$ $\boxed{\text{D}}$ $\dfrac{1}{(i+1)\,!}$ $\boxed{\text{E}}$ aucune des autres réponses

△ **L9** On admet que l'espérance d'une somme de variables aléatoires est la somme de leurs espérances. Donner une expression simple de l'espérance $\mathscr{R}_n$.