Durée : 4 heures

Baccalauréat C Tel Aviv juin 1976

EXERCICE 1

F désigne l'ensemble $\mathbb{Z}/7\mathbb{Z} = \{\dot{0},\ \dot{1},\ \dot{2},\ \dot{3},\ \dot{4},\ \dot{5},\ \dot{6}\}$.
Déterminer $(\alpha\ ;\ \beta) \in F^2$ de façon qu'il existe $(a,\ b,\ c) \in F^3$ tel que

$$\forall x \in F, \quad \dot{1}x^4 + \dot{3}x^3 + \dot{5}x^2 + \alpha x + \beta = \left(ax^2 + bx + c\right)^2.$$

EXERCICE 2

Dans un plan affine euclidien, on donne une droite D et deux points distincts F et A, symétriques par rapport à D. On désigne par H l'hyperbole d'excentricité 2 qui admet F pour foyer et D pour directrice associée à F.

1. Montrer que A est un sommet de H. Déterminer l'autre sommet A$'$ et le centre Ω, en calculant $\dfrac{\overline{\text{AA}'}}{\overline{\text{AF}}}$ et $\dfrac{\overline{\text{A}\Omega}}{\overline{\text{AF}}}$. Construire H.
2. Soit C un cercle centré en un point O de D, et passant par F.
   On se propose de montrer que : $C \cap H = \{\text{A},\ M_1,\ M_2,\ M_3\}$ où M_1, M_2, M_3 sont les sommets d'un triangle équilatéral.
   On rapporte le plan à un repère orthonormé $\left(\text{O}\ ;\ \overrightarrow{\imath},\ \overrightarrow{\jmath}\right)$, choisi de façon que $\left(\text{O}\ ;\ \overrightarrow{\imath}\right)$ soit un repère de D. À chaque point du plan correspond ainsi son affixe $z = x + \text{i}y$; on désigne par a l'affixe de F.
   Montrer que C et H sont les ensembles des points du plan dont les affixes vérifient respectivement

$$(C) \quad z\overline{z} = a\overline{a}, \quad (H) \quad (z-a)\left(\overline{z} - \overline{a}\right) + \left(z - \overline{z}\right)^2 = 0.$$

   En déduire que $C \cap H$ est l'ensemble des points du plan dont les affixes vérifient une équation de la forme :

$$\left(z - \overline{a}\right)\left(z^3 - k\right) = 0$$

   où k est un nombre complexe dont on exprimera le module et l'argument en fonction du module r et de l'argument φ de a. Conclure.

PROBLÈME

On note $\mathbb{N}^\star$ l'ensemble des entiers naturels non nuls et P l'ensemble des nombres premiers. À tout $n \in \mathbb{N}^\star$ on associe l'ensemble D_n des $d \in \mathbb{N}^\star$ qui divisent n, l'ensemble C_n des $(d_1,\ d_2) \in (\mathbb{N}^\star)^2$ tels que $d_1 d_2 = n$, et l'ensemble Γ_n des $(d_1,\ d_2,\ d_3) \in (\mathbb{N}^\star)^3$ tels que $d_1 d_2 d_3 = n$.
Le p.g.c.d. des entiers m et n est noté $m \wedge n$.

Partie A

Dans tout le problème, on appelle suite une application de $\mathbb{N}^\star$ dans $\mathbb{R}$ et on note $\mathcal{U}$ l'ensemble des suites. On admet que l'on dispose du groupe $(\mathcal{U},\ +)$, la loi (+) étant définie par :

$$\forall (u\ ;\ v) \in \mathcal{U}^2,\ \forall n \in \mathbb{N}^\star,\quad (u+v)(n) = u(n)+v(n).$$

On définit une seconde loi interne (T) sur $\mathcal{U}$ par :

$$\forall (u\ ;\ v) \in \mathcal{U}^2,\ \forall n \in \mathbb{N}^\star,\quad (u \text{ T } v)(n) = \sum_{d \in D_n} u(d)\cdot v\left(\frac{n}{d}\right).$$

C'est ainsi que : $(u \text{ T } v)(4) = u(1)v(4)+u(2)v(2)+u(4)v(1)$.

1. Vérifier que, pour tout $(u,\ v,\ w) \in \mathcal{U}^3$ et tout $n \in \mathbb{N}^\star$

$$(u \text{ T } v)(n) = \sum_{(d_1,\ d_2) \in C_n} u\left(d_1\right)\cdot v\left(d_2\right).$$

$$((u \text{ T } v) \text{ T } w)(n) = \sum_{(d_1,\ d_2,\ d_3) \in \Gamma_n} u\left(d_1\right)\cdot v\left(d_2\right)\cdot w\left(d_3\right).$$

Quelles propriétés de la loi (T) découlent de ce résultat (que l'on pourra admettre, à défaut de démonstration) ?

2. La loi (T) admet-elle un élément neutre ? Le triplet (,U, +-, T) est-il un anneau ?

Partie B

Une suite $u \in \mathcal{U}$ est dite *régulière* si et seulement si elle vérifie :

$$u(1) = 1,\ u(qq') = u(q)u(q') \text{ pour tout } (q, q') \in \left(N^\star\right)^2 \text{ tel que } q \wedge q' = 1.$$

1. Montrer que sont régulières les suites θ, ψ et f_m définies par

$$\forall n \in \mathbb{N}^\star,\quad \theta(n) = 1,\quad \psi(n) = n,\quad f_m(n) = m \wedge n$$

(où $m \in \mathbb{N}^\star$ est donné).

2. Soit u une suite régulière. Vérifier que $u\left(q_1 \cdots q_n\right) = \prod_{i=1}^{n} u\left(q_i\right)$ pour tout $\left(q_1, \cdots, q_k\right) \in \left(\mathbb{N}^\star\right)^k$ tel que $q_1, \cdots, q_k$ soient premiers entre eux deux à deux.

Exprimer $u(n)$ pour $n = \prod_{i=1}^{n} p_i^{\alpha_i}$, avec $\left(_1, \cdots, p_k\right) \in (\mathrm{P})^k$ et $(\alpha_1, \cdots ; \alpha_l) \in \left(\mathbb{N}^\star\right)^k$.

Partie C

1. Montrer que si les suites u et v sont régulières, alors la suite $u \text{ T } v$ est régulière.

2. À $n \in \mathbb{N}^\star$, on associe le nombre $v(n)$ des diviseurs de n dans $\mathbb{N}^\star$ et la somme $\sigma(n)$ de ces diviseurs. Montrer qu'il existe deux suites régulières u_1, et u_2 telles que $v = e \mathrm{T} u_1$, et $\sigma = e \mathrm{T} u_2$. En déduire que les suites v et cr sont régulières.

Les notations étant celles de B 2., donner des expressions de $v(n)$ et $\sigma(n)$. En particulier, calculer $v(700)$ et $\sigma(700)$.

3. Montrer qu'est régulière la suite λ définie par :

$$\left\{\begin{array}{ll}\lambda(1) = 1;\ \lambda(n) = 0 & \text{si } n \text{ est divisible par le carré d'un nombre premier;}\\ \lambda(n) = (-1)^k & \text{si } n \text{ est le produit de } k \text{ nombres premiers deux à deux distincts.}\end{array}\right.$$

Déterminer l'image de $n \in \mathbb{N}^*$ par chacune des suites

$$\lambda \mathrm{T} 0; \quad \lambda \mathrm{T} v; \quad \lambda \mathrm{T} \sigma; \quad \lambda \mathrm{T} \lambda.$$