

Durée : 4 heures

∞ Baccalauréat C Togo juin 1972 ∞

EXERCICE 1

Montrer par récurrence, que, pour tout entier naturel n , le nombre $3^{n+3} - 4^{4n+2}$ est divisible par 11.

EXERCICE 2

Soit a et b deux nombres complexes. Quelle relation doit lier a et b pour que les nombres complexes az et $\frac{\bar{z}}{b}$ aient, pour tout z complexe,

1. même module;
2. des arguments opposés?

Lorsque ces deux conditions sont remplies simultanément que peut-on dire des nombres az et $\frac{\bar{z}}{b}$?

Application : Soit $a = 1+i$. Déterminer b pour que les deux conditions ci-dessus soient vérifiées.

N. B. - On rappelle que \bar{z} désigne le nombre complexe conjugué de z .

PROBLÈME

Soit la fonction f_a , de \mathbb{R} dans \mathbb{R} , définie par

$$f_a(x) = ax + 1 + \text{Log}(ax)$$

(a est un paramètre réel et Log désigne la fonction logarithme népérien).

Partie A

1. f_a existe-t-elle quel que soit a ? (Dans toute la suite a est supposé tel que f_a existe.)
Quel est le domaine de définition de f_a ?
2. Soit (C_a) la courbe représentative de f_a en repère orthonormé. Montrer que (C_a) admet une direction asymptotique; (C_a) admet-elle une asymptote oblique?
3. Montrer que, pour tout $a \neq 0$ et pour tout x tel que $f_a(x)$ soit défini, on a $f_a(x) = f_{-a}(-x)$.
Par quelle transformation géométrique simple (C_{-a}) se déduit-elle de (C_a) ?
4. Étudier la fonction f_2 et tracer (C_2) et (C_{-2}) . Montrer à cette occasion que l'équation $f_2(x) = 0$ admet une racine comprise entre $\frac{1}{4e}$ et $\frac{1}{2e}$.

Partie B

Soit E l'ensemble des courbes (C_a) quand a parcourt $\mathbb{R} - \{0\} = \mathbb{R}^*$. On définit dans E une loi de composition (notée \star) par $(C_a) \star (C_b) = (C_{ab})$.

1. Montrer que (E, \star) possède une structure de groupe abélien.
2. Montrer que (E, \star) est isomorphe à (\mathbb{R}^*, \times) .
3. Peut-on définir, dans E , une loi de composition (notée \perp par $(C_a) \perp (C_b) = (C_{a+b})$?)
4. Déterminer tous les couples (a, b) , d'entiers relatifs, tels que

$$(C_a) \star (C_b) = (C_{a+b}).$$

Partie C

Soit T_λ la transformation du plan dans lui-même, qui, à tout point M de coordonnées $(x; y)$ associe le point M' de coordonnées $(x'; y')$ dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$, défini par

$$x' = \frac{1}{\lambda}x \quad \text{et} \quad y' = y, \quad \lambda \in \mathbb{R}^*.$$

1. Reconnaître la transformation T_λ . Montrer que l'ensemble, \mathcal{T} , des transformations T_λ ($\lambda \in \mathbb{R}^*$), muni de la loi de composition des applications, possède une structure de groupe abélien isomorphe à (\mathbb{R}^*, \times) .
2. Quelle est la transformée par T_λ d'une courbe (C_a) ?
3. Montrer que T_λ est une bijection de E dans E . [E est l'ensemble des courbes (C_a)].
4. A-t-on l'égalité

$$T_\lambda(C_a \star C_b) = T_\lambda(C_a) \star T_\lambda(C_b)?$$

Si $a + b \neq 0$, a-t-on l'égalité

$$T_\lambda(C_a \perp C_b) = T_\lambda(C_a) \perp T_\lambda(C_b)?$$

5. Montrer que (\mathcal{T}, \circ) et (E, \star) sont isomorphes.

N. B. - On donne pour valeurs décimales approchées des nombres e et $\text{Log } 2$ les nombres 2,7 et 0,7.