

♣ Baccalauréat C Togo juin 1990 ♣

EXERCICE 1

4 POINTS

Pour tout entier naturel n , on définit le réel u_n par :

$$u_n = \int_0^\pi \frac{\cos nx}{\frac{5}{4} - \cos x} dx.$$

- Justifier l'existence de u_n (on ne cherchera pas à calculer u_n).
- On admet que : $u_0 = \frac{4\pi}{3}$.
Démontrer que : $u_1 = \frac{2\pi}{3}$.
- Transformer la somme $\cos(n+2)x + \cos nx$ en un produit de cosinus.
 - Utiliser le résultat précédent pour démontrer que :

$$u_n + u_{n+2} = \frac{5}{2}u_{n+1} \quad (n \in \mathbb{N}).$$

- En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \frac{4\pi}{3} \left(\frac{1}{2}\right)^n$.
- On pose $S_n = u_0 + u_1 + \dots + u_n$.
Déterminer S_n en fonction de n , puis la limite de S_n lorsque n tend vers $+\infty$.

EXERCICE 2

5 POINTS

Le plan est rapporté à un repère orthonormal $(0; T, h)$. On considère la parabole (\mathcal{P}) d'équation :

$$y = x^2.$$

- Déterminer les coordonnées du foyer F de (\mathcal{P}) .
- Démontrer que par tout point M du plan de coordonnées $(a; b)$ telles que $b < a^2$, on peut mener deux tangentes à (\mathcal{P}) .
On désigne par N_1 et N_2 les points de contact.
Démontrer que N_1 et N_2 ont pour abscisses respectives :

$$x_1 = a + \sqrt{a^2 - b} \quad \text{et} \quad x_2 = a - \sqrt{a^2 - b}.$$

- Démontrer que si les droites (FN_1) et (FN_2) sont orthogonales alors le point M appartient à la courbe (\mathcal{C}) d'équation :

$$16y^2 + 24y - 16x^2 + 1 = 0.$$

- Démontrer que (\mathcal{C}) est une hyperbole et vérifier que F est un foyer de (\mathcal{C}) .
- Tracer les courbes (\mathcal{P}) et (\mathcal{C}) dans un même repère.

PROBLÈME**11 POINTS****Partie I**

Soit f la fonction numérique de la variable réelle x définie sur $\mathbb{R} - \{-1\}$ par :

$$f(x) = \frac{x^3 + 3x^2 + 5x + 5}{(x+1)^2}.$$

1. Démontrer qu'il existe deux réels a et b et une fonction ϵ définie sur $\mathbb{R} - \{-1\}$ tels que :

$$f(x) = ax + b + \epsilon(x) \quad \text{et} \quad \lim_{|x| \rightarrow +\infty} \epsilon(x) = 0.$$

2. Étudier les variations de f (dérivée, signe de la dérivée, limites aux bornes de l'ensemble de définition).
3. On désigne par (\mathcal{C}) la courbe représentative de f dans le plan muni du repère orthonormal $(O; \vec{i}, \vec{j})$.
Démontrer que (\mathcal{C}) possède une asymptote oblique Δ et étudier la position relative de (\mathcal{C}) et Δ . Tracer (\mathcal{C}) et Δ .

Partie II

Soit g_m la fonction définie sur \mathbb{R} par :

$$g_m(x) = x + m(x^2 + 4x + 5)e^{-x} \quad (m \text{ paramètre réel}).$$

1. Déterminer $g'_m(x)$ et démontrer que le nombre de solutions de l'équation $g'_m(x) = 0$ est donné par le nombre de solutions de l'équation $m = h(x)$ où h est une fonction que l'on déterminera.
2. Étudier les variations de h et en déduire suivant les valeurs de m le nombre de solutions de l'équation $g'_m(x) = 0$.
3. On suppose dans cette question que l'équation $g'_m(x) = 0$ a au moins une solution. Soit α une de ces solutions et M_α le point de coordonnées $(\alpha, g_m(\alpha))$.
Démontrer que M_α est un point de la courbe (\mathcal{C}) définie au 1. du problème.

Partie III

On suppose dans cette partie que $m = \frac{1}{2}$.

On pose $g_{\frac{1}{2}} = g$.

On a donc : $g(x) = x + \frac{1}{2}(x^2 + 4x + 5)e^{-x}$.

1. Démontrer que l'équation $g'(x) = 0$ possède une seule solution α_0 et que $\alpha_0 \in]-2; -1[$.
2. Étudier les variations de g (signe de $g'(x)$, limites aux bornes).

Partie IV

Le but de cette partie est de déterminer une valeur approchée de α_0 (α_0 défini au III. 1).

1. Démontrer que α_0 est tel que :

$$\alpha_0 = -\sqrt{2}e^{\frac{\alpha_0}{2}} - 1.$$

2. On définit la fonction φ sur $[-2; -1]$ par :

$$\varphi(x) = -1 - \sqrt{2}e^{x^2}.$$

Démontrer que si a et b sont deux réels de l'intervalle $[-2; -1]$, on a :

$$|\varphi(b) - \varphi(a)| \leq \frac{1}{\sqrt{2}e} |b - a|.$$

3. a. Démontrer que si :

$$x \in [-2; -1] \quad \text{alors} \quad \varphi(x) \in [-2; -1].$$

- b. On définit la suite (u_n) par $u_0 \in [-2; -1]$ et

$$\text{pour } n \in \mathbb{N}^* : u_{n+1} = \varphi(u_n).$$

Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|u_{n+1} - \alpha_0| \leq \frac{1}{2} |u_n - \alpha_0|$ et que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \alpha_0.$$

- c. Déterminer une valeur $n_0 \in \mathbb{N}$ telle que si $n \geq n_0$ alors u_n est une valeur approchée de α_0 à 10^{-3} près.