

∞ Baccalauréat C Toulouse juin 1984 ∞

EXERCICE 1

4 POINTS

Soit, dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$, la courbe (E) d'équation $4x^2 + y^2 - 4 = 0$ et les points A(1; 0) et B(0; 2).

1. Reconnaître (E) et en donner les éléments caractéristiques (centre, sommets, foyers, directrices). Tracer (E).
 2. M étant un point quelconque de (E), montrer que l'isobarycentre M' des points A, B et M est l'image de M par une transformation que l'on précisera.
 3. Quel est l'ensemble (F) des points M' quand M décrit (E).
Préciser ses éléments caractéristiques. Tracer (F).
- N. B. :** Toute solution, analytique ou non, sera acceptée.

EXERCICE 2

4 POINTS

Dans le plan affine euclidien P rapporté au repère orthonormé direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$, on considère l'application S qui, au point M d'affixe z fait correspondre le point M' d'affixe z' telle que

$$z' = (1 + i)z + 2.$$

1. Reconnaître cette application; montrer qu'elle a un point invariant I.
Donner une construction géométrique du point M' image de M par S.
Quelle est la nature du triangle (I, M, M') ?
2. Quel est l'ensemble C_1 des points M de P tels que

$$\|\vec{OM}\| = \|\vec{OM'}\|?$$

3. Quel est l'ensemble C_2 des points M de P tels que

$$\vec{OM} \cdot \vec{OM'} = 0?$$

4. Dédire des questions précédentes une construction géométrique des images des points d'intersection de C_1 et C_2 .

PROBLÈME

12 POINTS

Partie A

1. En étudiant le sens de variation de la fonction de \mathbb{R} vers \mathbb{R} telle que

$$t \mapsto t - \ln t - 1$$

montrer que, pour tout réel t strictement positif on a $\ln t \leq t - 1$.

2. Soit f la fonction de \mathbb{R} vers \mathbb{R} telle que

$$f(x) = \frac{x}{x - \ln x}.$$

- a. Étudier le sens de variation de f , les limites aux bornes de l'ensemble de définition.
- b. Soit f_1 la fonction définie par $f_1(x) = f(x)$ si $x > 0$ et $f_1(0) = 0$.
Montrer que f_1 est le prolongement par continuité de f en zéro.
Construire la représentation graphique de f_1 dans un repère orthonormé (unité de longueur : 2 cm). On précisera la demi-tangente au point d'abscisse zéro ainsi que la tangente au point d'abscisse 1.
- c. Dans cette question x est un réel fixé de l'intervalle $[1 ; +\infty[$.
Calculer, en justifiant son existence, la limite de la suite définie par

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_n = 1 + \frac{\ln x}{x} + \frac{(\ln x)^2}{x^2} + \cdots + \frac{(\ln x)^n}{x^n}.$$

Partie B

On se propose d'étudier la fonction F définie sur $\mathbb{R}_+^* =]0 ; +\infty[$ par

$$F(x) = \int_1^x \frac{t}{t - \ln t} dt.$$

1. Justifier l'existence et la dérivabilité de F sur \mathbb{R} . Étudier le sens de variation de F . (On n'étudiera pas les limites de F dans cette question).
2. Déterminer le signe de $F(x)$ suivant les valeurs de x . Quelle signification géométrique peut-on donner du réel $F(x)$?
3. Étude de la limite de F en zéro.
Démontrer que, pour x appartenant à $]0 ; 1]$ on a

$$\frac{x}{x - \ln x} \leq x.$$

En déduire que, pour x appartenant à $]0 ; 1]$ on a

$$\frac{x^2 - 1}{2} \leq F(x) \leq 0.$$

En déduire que $F(x)$ admet une limite λ comprise entre $-\frac{1}{2}$ et 0 quand x tend vers 0. (On ne cherchera pas à calculer λ).

4. Étude de $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x)$.
Montrer que, pour tout x de $[1 ; +\infty[$, $f(x) \geq 1$.
En déduire que $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = +\infty$.
5. On se propose d'encadrer la fonction F par deux fonctions, lorsque x est supérieur à 1.

- a. Calculer $\int_1^x (1 + \ln t) dt$ pour x appartenant à \mathbb{R}_+^* .
Montrer que si t est supérieur à 1 alors

$$\frac{t}{t - \ln t} \leq 1 + \ln t.$$

En déduire que, pour x supérieur à 1, on a

$$F(x) \leq x \ln x.$$

- b. Calculer $\int_1^x \left(1 + \frac{\ln t}{t}\right) dt$ pour x appartenant à \mathbb{R}_+^* .
Montrer que, pour tout x supérieur à 1, on a

$$x + \frac{1}{2}(\ln x)^2 - 1 \leq F(x).$$

- c. Écrire l'encadrement de $F(x)$ pour x supérieur à 1.

Partie C

Pour chaque réel i de l'ensemble $\{1, 2, 3, 4, 5\}$, prendre pour valeur approchée de $F(i)$, la moyenne arithmétique des deux valeurs qui encadrent $F(i)$. On note y_i cette valeur approchée, que l'on donnera avec deux chiffres après la virgule.

Présenter les résultats obtenus dans un tableau et placer, dans un repère orthonormé, les points M_i de coordonnées $(i ; y_i)$ avec i appartenant à $\{1, 2, 3, 4, 5\}$.

Déterminer le point moyen du nuage et donner une équation de la droite d'ajustement en utilisant la méthode des moindres carrés. Tracer cette droite dans le repère orthonormé.