Baccalauréat C Toulouse juin 1971

EXERCICE 1

Déterminer tous les couples $(a\,;\,b)$ d'entiers naturels $(a \geqslant b)$ tels que $a^2 - b^2 = 1\,620$ et que le plus grand commun diviseur de a et de b soit 6.

EXERCICE 2

1. Déterminer les nombres complexes z tels que $z^2 = -2\text{i}$.
   (On donnera les formes trigonométrique et algébrique des nombres trouvés.)
2. Trouver les nombres complexes, racines de l'équation du second degré,
$$x^2 - 2(3+2\text{i})x + 5 + 14\text{i} = 0.$$
3. Soit l'équation
$$x^3 + ax^2 + bx + 15 + 42\text{i} = 0,$$
   où a et b sont deux nombres réels. Les déterminer pour que cette équation admette le nombre complexe $2+3\text{i}$ pour solution. (On ne demande pas les autres solutions.

PROBLÈME

Partie A

Un plan $(\mathscr{P})$ est rapporté à un repère orthonormé $\left(\text{O}\,;\,\overrightarrow{\imath},\,\overrightarrow{\jmath}\right)$; $x'\text{O}x$ est l'axe des abscisses et $y'\text{O}y$ celui des ordonnées.

1. Soit E l'ensemble des points de $x'\text{O}x$ d'abscisse différente de zéro. On considère l'application T de E dans $x'\text{O}x$ définie par la relation
$$x' = -\frac{15}{x} + 8$$
   x étant l'abscisse d'un point M de E et x' l'abscisse du point associé M' tel que $T(M) = M'$.
   Est-ce que T est bijective ? Démontrer qu'il existe deux points A et B de E tels que $T(\text{A}) = \text{A}$ et $T(\text{B}) = \text{B}$.(On choisit l'abscisse de A inférieure à celle de B.)
2. Soit $\left(\mathscr{P}^\star\right) = (\mathscr{P}) - \{O\}$. On considère l'application $\mathscr{F}$ de $\left(\mathscr{P}^\star\right)$ dans $(\mathscr{P})$, produit de l'inversion $\mathscr{J}$ de pôle O et de puissance k par la translation $\mathscr{T}$ de vecteur $\delta\,\overrightarrow{\imath}$; donc $\mathscr{F} = \mathscr{T} \circ \mathscr{J}$.
   Déterminer k et δ pour que T soit la restriction de $\mathscr{F}$ à E, c'est-à-dire que, pour tout point M de E, $\mathscr{F}(M) = T(M)$. Dans la suite k et δ sont les nombres ainsi déterminés.
   Calculer les coordonnées x' et y' du point M' transformé par $\mathscr{F}$ d'un point M de coordonnées x et y.

3. **a.** Soit (Γ) le cercle de centre O et de rayon $\sqrt{15}$.

On appelle cercle (C) tout cercle, autre que (Γ), invariant dans $\mathscr{J}$. Démontrer que tout cercle (C) coupe (Γ) en deux points diamétralement opposés.

b. Démontrer que l'ensemble F des cercles (C) passant par le point U$(+1\ ;\ +2)$ est un faisceau à points de base, et calculer les coordonnées du deuxième point de base V.

Trouver géométriquement le transformé F' de l'ensemble F par la transformation $\mathscr{F}$.

c. Vérifier que le vecteur $\overrightarrow{u}\,(-2\ ;\ +1)$ est un vecteur directeur de la médiatrice (Δ) du segment [UV].

Soit I le milieu du segment [UV] et ω le point de (Δ) défini par $\overrightarrow{\mathrm{I}\omega} = t\,\overrightarrow{u}$, t étant un réel. Calculer les coordonnées de ω et former l'équation du cercle (C) de F de centre ω. Former les équations des cercles de F passant par A ou par B.

d. Soit le point K$(+2\,;\,0)$. Démontrer que la polaire de K par rapport à tout cercle de F passe par un point fixe P et calculer les coordonnées de P.

Partie B

On considère une suite (u_n) de terme général u_n, (n entier strictement positif) vérifiant la relation de récurrence

$$u_{n+1} = -\frac{15}{u_n} + 8$$

Démontrer que si $u_1 \neq 3$ on a, pour tout n, $\quad u_n \neq 3$, et qu'il existe un nombre rationnel α indépendant de n tel que

$$\frac{u_{n+1}-5}{u_{n+1}-3} = \alpha\frac{u_n-5}{u_n-3}$$

Soit $t_n = \dfrac{u_n-5}{u_n-3}$; calculer t_n, puis u_n en fonction de n, du nombre α trouvé et de t_1.
Quelle est la limite de u_n quand n tend vers $+\infty$?