Durée : 4 heures

Baccalauréat C Toulouse juin 1972

EXERCICE 1

Le plan (E) est un plan vectoriel rapporté à une base $\left(\vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$. On considère la famille, $\mathcal{F}$, des endomorphismes f_m de (E) [c'est-à-dire des applications linéaires de (E) dans (E)] qui ont une matrice de la forme $\begin{pmatrix} m & 1 \\ 1 & m \end{pmatrix}$, m étant un nombre réel.

1. Déterminer l'ensemble des valeurs de m pour lesquelles f_m est un automorphisme de (E).

   Déterminer le noyau et l'image de chacun des endomorphismes de la famille qui ne sont pas des automorphismes.
2. Déterminer et reconnaître tout endomorphisme involutif appartenant à la famille $\mathcal{F}$.

EXERCICE 2

Résoudre dans l'ensemble, $\mathbb{C}$, des nombres complexes l'équation

$$z^4 + (5 - \mathrm{i})z^2 + 4 - 4\mathrm{i} = 0.$$

Donner les solutions sous leur forme trigonométrique.

PROBLÈME

On désigne par (Δ) l'ensemble des nombres réels différents de -1 et de $+1$: $(\delta) = \mathbb{R} - \{-1~;~1\}$.

1. Étudier les variations de l'application f, de (Δ) dans $\mathbb{R}$, définie par

$$f(x) = \frac{x^3 - 9x}{2\left(x^2 - 1\right)}$$

   f est-elle une bijection de (Δ) sur $\mathbb{R}$?
2. Les restrictions de f à $]-\infty~;~-1[$, à $]-1~;~1[$ et à $]1~;~+\infty[$ sont-elles des bijections? Pourquoi?
3. Soit a un élément donné de (Δ).

   Démontrer que a, $\dfrac{a-3}{a+1}$ et $-\dfrac{a+3}{a-1}$ sont les trois solutions de l'équation $f(x) = f(a)$.

   Soit les applications de (Δ) dans $\mathbb{R}$ définies par

$$i(a) = a, \quad u(a) = \frac{a-3}{a+1} \quad \text{et } v(a) = -\frac{a+3}{a-1}.$$

   Établir que $f \circ i = f \circ u = f \circ v$ ($\circ$ est le symbole de la loi de composition des applications).

   Comparer $v(a)$ et $-u(-a)$ et $u(a)$ et $-v(-a)$.

4. Utiliser une propriété de f pour déduire de la question précédente les solutions de l'équation $f(x) + f(a) = 0$, a étant un élément donné de (Δ).

5. Donner le domaine de définition et la représentation graphique, en repère orthonormé, de la fonction k qui, au nombre réel x, fait correspondre

$$k(x) = \frac{\left|x^2-9\right|}{x^2-9}.$$

6. On considère la fonction g définie par

$$\left\{\begin{array}{lcl} g(x) & = & k(x) \cdot f(x), \quad \text{pour } x \in (\Delta) - \{-3 ; 3\} \\ g(-3) & = & g(3) = 0. \end{array}\right.$$

a. g est-elle continue au point d'abscisse 3 ?

b. g est-elle dérivable au point d'abscisse 3 ?

c. Donner le tableau de variation de g et construire par rapport au même repère $\left(\text{O} ; \overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{\jmath}\right)$ sa représentation graphique.

7. Soit m un nombre réel strictement plus grand que 3. Calculer l'aire, $\mathcal{A}_m$, de l'ensemble des points $M(x ; y)$ qui ont, dans le repère $\left(\text{O} ; \overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{\jmath}\right)$, une abscisse x et une ordonnée y vérifiant les inégalités

$$\sqrt{5} \leqslant x \leqslant m \quad \text{et} \quad g(x) \leqslant y \leqslant \frac{x}{2}$$

Déterminer le nombre réel m $(m > 3)$ pour que $\mathcal{A}_m$ soit égale à 6.