Durée : 4 heures

∽ Baccalauréat C Toulouse juin 1976 ∾

EXERCICE 1

Soit la fonction f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$:

$$x \longmapsto f(x) = \frac{1}{x\left(1+\text{Log}\,x\right)}$$

La notation Log désigne le logarithme népérien.

1. Étudier les variations de f et construire son graphique dans un plan P rapporté à un repère orthonormé $\left(\text{O}~;~\vec{\imath},~\vec{\jmath}\right)$.
2. Soit g la restriction de f à $\text{I} = \left]\dfrac{1}{\text{e}}~;~+\infty\right[$.
   a. Démontrer que g est une bijection de I sur $g(\text{I}) =]0~;~+\infty[$.
   b. On désigne par g^{-1} la bijection réciproque de g ; calculer $g(\text{e})$ et la dérivée de g^{-1} au point $\dfrac{1}{2\text{e}}$.

EXERCICE 2

Soit $\mathcal{V}$ un espace vectoriel de dimension trois et $\left(\vec{\imath},~\vec{\jmath},~\vec{k}\right)$ une base de $\mathcal{V}$. On considère l'application linéaire φ de $\mathcal{V}$ dans $\mathcal{V}$ qui à tout vecteur $\vec{u}$ de coordonnées $(x~;~y~;~z)$ associe le vecteur $\overrightarrow{u'}$ de coordonnées $\left(x'~;~y'~;~z'\right)$ telles que

$$\left\{\begin{array}{l c l} x' &=& 3x+y-z\\ y' &=& 2x+2y-z\\ z' &=& 4x+2y-z \end{array}\right.$$

1. Déterminer l'ensemble $\mathcal{P}$ des vecteurs invariants par φ et indiquer une base $\left(\overrightarrow{e_1},~\overrightarrow{e_2}\right)$ de $\mathcal{P}$.
2. Soit $\mathcal{D}$ la droite vectorielle engendrée par le vecteur $\overrightarrow{e_3} = \vec{\imath} + \vec{\jmath} + 2\vec{k}$.
   a. Démontrer que la restriction de φ à $\mathcal{D}$ est une homothétie vectorielle de $\mathcal{D}$.
   b. Démontrer que tout vecteur $\vec{u}$ de $\mathcal{V}$ peut être décomposé d'une manière unique en $\vec{u} = \overrightarrow{u'} + \overrightarrow{u''}$, $\overrightarrow{u'} \in \mathcal{P}$, $\overrightarrow{u''} \in \mathcal{D}$.
   c. Établir que :

$$\forall \vec{u} \in \mathcal{V}, \quad \varphi\left(\vec{u}\right) = \overrightarrow{u'} + 2\overrightarrow{u''} = \vec{u} + \overrightarrow{u''}.$$

3. Soit $\mathcal{E}$ un espace affine associé à $\mathcal{V}$ et $\left(\text{O},~\overrightarrow{e_1},~\overrightarrow{e_2},~\overrightarrow{e_3}\right)$ un repère cartésien de $\mathcal{E}$, $\overrightarrow{e_1}$, $\overrightarrow{e_2}$ et $\overrightarrow{e_3}$ étant les vecteurs définis précédemment.
   On considère l'application affine f qui laisse le point O invariant et dont l'endomorphisme associé est φ. Si M' est l'image par f du point M de $\mathcal{E}$, en utilisant ce qui

précède, exprimer dans le repère choisi les coordonnées de M' en fonction de celles de M.

Indiquer une construction géométrique de M'.

PROBLÈME

Une suite réelle f application de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{R}$ donne de n l'image $f(n)$ notée $f_{n?n}$.
Soit a et α deux réels fixés vérifiant : $a \neq 0$ et $0 \leqslant \alpha < \pi$.
On considère l'ensemble F des suites f qui vérifient :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad f_{n+2} = (2a\cos\alpha)f_{n+1} - a^2 f_n.$$

1. *On suppose dans cette question que* $\alpha \neq 0$

Démontrer que les suites u et v définies par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = a^n \cos n\alpha \quad \text{et} \quad v_n = a^n \sin n\alpha.$$

sont deux éléments de F. Démontrer que les vecteurs de $\mathbb{R}^2$, $(u_0,\, u_1)$; $(v_0,\, v_1)$ sont indépendants.

2. *On suppose dans cette question que* $\alpha = 0$

Démontrer que les suites r et s définies par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad r_n = a^n \quad \text{et} \quad s_n = na^n$$

sont deux éléments de F. Démontrer que les vecteurs de $\mathbb{R}^2$, $(r_0,\, r_1)$; $(s_0,\, s_1)$ sont indépendants.

3. a. Etablir que F est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{F}(\mathbb{N},\, \mathbb{R})$, espace vectoriel des suites réelles.

b. Démontrer que f est déterminée par la donnée du couple $\left(f_0,\, f_1\right)$ et en déduire que l'application φ de F dans $\mathbb{R}^2$ définie par $\varphi(f) = (f_0,\, f_1)$ est bijective.

c. Démontrer que φ est une application linéaire. Quelle est la dimension de F ? On rappelle que, compte-tenu de la notation $f\,n_n$

$$(f+g)(n) = f_n + g_n \quad \text{et} \quad (kf)(n) = kf_n, \quad k \in \mathbb{R}.$$

4. Soit φ^{-1} l'application réciproque de φ définie dans $\mathbb{R}^2$ et à valeurs dans F.Montrer que si W_1 et W_2 sont deux vecteurs indépendants de $\mathbb{R}^2$, alors $\varphi^{-1}(W_1)$ et $\varphi^{-1}(W_2)$ sont deux vecteurs de F indépendants.

En déduire que si $\alpha \neq 0$, $(u,\ v)$ est une base de F et que si $\alpha = 0$, $(r,\ s)$ est une base de F. Indiquer dans les deux cas une forme générale des éléments de F.

5. Soit b un réel fixé non nul. On considère l'ensemble C des suites réelles c telles que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad c_{n+2} - (2a\cos\alpha)c_{n+1} + a^2 c_n = b^n.$$

a. Si $\alpha = 0$ et $b = a$, démontrer qu'il existe un réel λ tel que la suite t définie par

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad t_n = \lambda n^2 a^n$$

appartient à C.

b. Si $\alpha \neq 0$ et $b \neq a$, démontrer qu'il existe un réel μ tel que la suite t' définie par

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad t'_n = \mu b^n$$

appartient à C.

c. L'ensemble C est-il un sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}(\mathbb{N}, \mathbb{R})$?

6. Si $\alpha = 0$ et $b = a$, c appartenant à C, démontrer que la suite de terme général $(c_n - t_n)$ est un élément de F; inversement si f appartient à F, montrer que la suite de terme général $\left(f_n + t_n\right)$ appartient à C. En déduire une forme générale des éléments de C.

7. Déterminer de même une forme générale des éléments de C lorsque : $\alpha \neq 0$ ou $b \neq a$.