

Baccalauréat C Toulouse juin 1977

EXERCICE 1

3 POINTS

1. Trouver l'ensemble des entiers naturels diviseurs du nombre 5929.
2. Trouver les couples $(a ; b)$ d'entiers naturels dont le P. G. C. D. et le P. P. C. M. sont les solutions de l'équation

$$x^2 - 91x + 588 = 0.$$

EXERCICE 2

5 POINTS

1. Soit φ la fonction réelle de variable réelle, qui, à x , associe

$$\varphi(x) = x^2 + \text{Log } x$$

Déduire de l'étude de ses variations que cette fonction s'annule pour une seule valeur x_0 de la variable, comprise entre $\frac{1}{e}$ et 1. (On ne cherchera pas à calculer x_0).

2. Soit f la fonction réelle de variable réelle, qui, à x , associe

$$f(x) = 1 - x + \frac{1 + \text{Log } x}{x}.$$

Étudier les variations de f . Montrer que la représentation graphique C de f dans un repère orthonormé d'axes Ox et Oy , admet deux asymptotes, dont l'une D n'est pas parallèle à Oy ; préciser la position de C par rapport à D .

(On ne cherchera ni la valeur du maximum, ni les abscisses des points d'intersection avec Ox , ni le point d'inflexion).

3. Construire C .
4. Calculer l'aire de l'ensemble E des points $M(x ; y)$ définis dans le repère (Ox, Oy) par

$$\frac{1}{e} \leq x \leq 1 \quad \text{et} \quad 0 \leq y \leq 1 - x + \frac{1 + \text{Log } x}{x}.$$

On utilisera les valeurs numériques $\frac{1}{e} \approx 0,368$; $\frac{1}{e^2} \approx 0,134$.

PROBLÈME

12 POINTS

Soit P un plan affine euclidien rapporté au repère orthonormé $(O ; \vec{i}, \vec{j})$ et soit \mathcal{V} l'espace vectoriel associé.

1. On considère l'ensemble E des points m de P dont les coordonnées $(; y)$ vérifient l'équation

$$x^2 + 4y^2 = 4$$

Identifier E , déterminer ses foyers, les directrices associées et l'excentricité.

2. Soit s l'application affine de P dans P qui au point $M(X; Y)$ associe le point $M'(X'; Y')$ défini par les formules

$$s \quad \begin{cases} X' = \frac{3}{5}X + \frac{8}{5}Y \\ Y' = \frac{2}{5}X - \frac{3}{5}Y \end{cases}$$

- a. Démontrer que s est bijective et déterminer s^{-1} ; en déduire la nature de s et les éléments géométriques qui la caractérisent.
 b. Démontrer que E est globalement invariante par s .
3. Soit g l'application affine de P dans P définie par :

$$g \quad \begin{cases} X' = \frac{3}{5}X - \frac{8}{5}Y \\ Y' = \frac{2}{5}X + \frac{3}{5}Y \end{cases}$$

- a. u étant la symétrie orthogonale d'axe $x'Ox$, démontrer que $g = s \circ u$.
 b. Établir que E est globalement invariante par g .
4. Étude de l'ensemble \mathcal{F} des applications affines f de P dans P laissant E globalement invariante.
- a. Montrer que toute application f appartenant à \mathcal{F} est bijective. En utilisant le fait qu'une ellipse admet un centre de symétrie unique, prouver que, pour toute application f appartenant à \mathcal{F} , $f(0) = 0$.
 Montrer que \mathcal{F} est un groupe pour la loi de composition des applications.
 b. Montrer que l'application a définie par

$$a: \quad \begin{cases} X' = X \\ Y' = 2Y \end{cases}$$

transforme E en un cercle C ; déterminer a^{-1} .

- c. Prouver que $a \circ f \circ a^{-1}$ transforme C en C . Montrer que les transformations affines qui conservent C sont les isométries affines laissant O invariant. En déduire que : $a \circ f \circ a^{-1}$ est de la forme

$$\begin{cases} X' = X \cos \alpha + \epsilon Y \sin \alpha \\ Y' = X \sin \alpha - \epsilon Y \cos \alpha \end{cases} \quad \text{où } \epsilon = \pm 1$$

En déduire la forme générale des équations de f . Quelles sont les valeurs de α et de ϵ qui donnent les applications s et g ?