

∞ Baccalauréat C Toulouse juin 1979 ∞

EXERCICE 1

3 POINTS

Soit un plan affine P , muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{u}, \vec{v})$.

Dans P , on considère les n points A_1, A_2, \dots, A_n dont les affixes dans ce repère sont les racines dans \mathbb{C} de l'équation

$$(1) \quad z^n = 1 \quad (n \in \mathbb{N}, n > 2).$$

On désigne par z_1 le nombre complexe $z_1 = \cos \frac{2\pi}{n} + i \sin \frac{2\pi}{n}$.

1. Exprimer en fonction de z_1 les n racines de l'équation (1).

Déterminer l'isobarycentre des points A_1, A_2, \dots, A_n .

(On rappelle que l'isobarycentre d'un ensemble de points est le barycentre de ces points affectés de coefficients tous égaux).

2. Déterminer l'ensemble des points M de P tels que

$$\left\| \overrightarrow{MA_1} + \overrightarrow{MA_2} + \dots + \overrightarrow{MA_n} \right\| = n.$$

3. Déterminer l'ensemble des points M de P tels que

$$MA_1^2 + MA_2^2 + \dots + MA_n^2 = 2n.$$

EXERCICE 2

3 POINTS

On considère l'ensemble Γ des points M d'un plan affine euclidien dont les coordonnées $(x; y)$ par rapport à un repère orthonormé $(O; \vec{u}, \vec{v})$ satisfont à la relation :

$$\frac{y^4}{16} = x^4 - 2x^2 + 1.$$

Démontrer que Γ est la réunion de deux coniques.

On dessinera ces deux coniques après avoir déterminé leurs axes, leurs sommets, leurs foyers et les asymptotes éventuelles.

PROBLÈME

14 POINTS

Soit la fonction numérique f de la variable réelle x définie par :

$$f(x) = \frac{1}{2} \log \frac{1+x}{1-x}.$$

Partie A

1. Démontrer que l'ensemble de définition de f est l'intervalle $D =]-1; +1[$.

Démontrer que f est une fonction continue sur D .

Démontrer que f est une fonction impaire.

2. Étudier les variations de f .

Démontrer que f est une bijection de D sur \mathbb{R} .

On désigne par f^{-1} la fonction réciproque de f . Exprimer $f^{-1}(x)$ pour $x \in \mathbb{R}$. Pour cela, on résoudra l'équation d'inconnue y , $x = f(y)$, x étant un réel donné.

3. Soit respectivement C et C' les courbes représentatives de f et f^{-1} par rapport à un même repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$. Écrire une équation de la tangente à la courbe C au point d'abscisse $x = 0$.

Étudier la position de C par rapport à cette tangente : on pourra étudier les variations de la fonction $\varphi : x \mapsto f(x) - x$ ($x \in D$).

Tracer les courbes C et C' dans le plan rapporté à un repère orthonormé. (On prendra comme unité de longueur : 4 cm).

Partie B**1. Démontrer que, quels que soient les réels x et y appartenant à D , on a**

$$\left| \frac{x+y}{1+xy} \right| < 1.$$

Ceci permet de définir dans D une loi de composition interne, notée \star , telle que :

$$\forall (x; y) \in D^2, \quad x \star y = \frac{x+y}{1+xy}.$$

Démontrer que $\forall (x; y) \in D^2, f(x \star y) = f(x) + f(y)$.

Quelle est la structure de (D, \star) ?

2. Soit a un réel quelconque de D . On pose

$$a^{(1)} = a, \quad a^{(2)} = a \star a \text{ et pour tout } n, \text{ entier naturel non nul } a^{(n+1)} = a^{(n)} \star a.$$

Démontrer par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, f[a^{(n)}] = nf(a)$.

En déduire la relation :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \frac{1+a^{(n)}}{1-a^{(n)}} = \left(\frac{1+a}{1-a} \right)^n \quad (1)$$

Démontrer que la suite terme général $a^{(n)}$, ($n \in \mathbb{N}^*$) a une limite quand n tend vers $+\infty$, et étudier sa limite suivant les valeurs de a (On pourra utiliser la relation (1)).

Partie C**1. Soit g une fonction numérique de variable réelle, continue, dérivable, strictement monotone sur un intervalle ouvert J . On désigne par g' sa fonction dérivée sur J et par g^{-1} la fonction réciproque de g .**

Soit Id la fonction définie par : $\forall x \in J, \text{Id}(x) = x$.

Pourquoi la fonction g^{-1} admet-elle des primitives sur $g(J)$?

Soit Γ une primitive de g^{-1} . Démontrer que $\Gamma \circ g$ est une primitive de $\text{Id} \cdot g'$.

En déduire que :

$$\forall (x; y) \in \mathbb{J}^2 \quad \int_{g(x)}^{g(y)} g^{-1}(t) dt = \int_x^y t \cdot g'(t) dt.$$

2. f étant la fonction étudiée dans la partie A et x un nombre quelconque de D , calculer

$$\int_0^x t \cdot f'(t) dt.$$

Démontrer que : $\forall y \in \mathbb{R}, \quad \int_0^x f^{-1}(t) dt = \log \frac{e^y + e^{-y}}{2}.$

On pourra utiliser la 1^{re} question de la partie C.

3. Soit \mathcal{A} le domaine plan, ensemble des points dont les coordonnées $(x; y)$ vérifient les conditions

$$0 \leq x \leq 1 \quad \text{et} \quad 0 \leq y \leq 1 \quad \text{et} \quad f^{-1}(x) \leq y \leq f(x).$$

Soit \mathcal{B} le domaine plan, ensemble des points dont les coordonnées $(x; y)$ vérifient les conditions :

$$-1 \leq x \leq 1 \quad \text{et} \quad -1 \leq y \leq 1 \quad \text{et} \quad |f^{-1}(x)| \leq |y| \leq |f(x)|.$$

a. Utiliser le dessin de A 3. pour hâchurer les domaines \mathcal{A} et \mathcal{B} ainsi définis.

b. Calculer $\int_0^1 f^{-1} dt.$

c. En déduire, en cm^2 , l'aire du domaine \mathcal{A} et l'aire du domaine \mathcal{B} .