∽ Baccalauréat C Toulouse juin 1981 ∾

EXERCICE 1

1. Calculer, pour $p = 0$, puis pour p entier strictement positif, le reste de la division de 10^p par 6.

2. Un entier naturel x est écrit $\overline{a_n a_{n-1} \cdots a_1 a_0}$ dans le système de numération de base dix.

Démontrer que 6 divise x si, et seulement si, 6 divise

$$4\left(a_n + a_{n-1} + \cdots + a_1\right) + a_0.$$

EXERCICE 2

P est le plan affine euclidien rapporté à un repère orthonormé $\left(\text{O}~;~\vec{u},~\vec{v}\right)$.
On appelle F l'application de P dans P qui, à tout point M d'affixe le nombre complexe z, associe le point $F(M)$ d'affixe

$$z^2 + 2z + \frac{1}{2}.$$

medskip

1. L'application F est-elle une bijection de P dans P ?

2. Déterminer les points de P invariants par F.

3. Soit D la droite d'équation $x = -\dfrac{1}{2}$ dans le repère $\left(\text{O}~;~\vec{u},~\vec{v}\right)$. M étant un point de D, calculer les coordonnées de $F(M)$ en fonction de l'ordonnée de M.

Écrire une équation cartésienne de l'image de D par F.

Reconnaître la courbe obtenue et la tracer.

PROBLÈME

On rappelle que l'ensemble $\mathcal{F}$ des applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ muni des opérations addition et multiplication par un réel est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$.

Partie A

Soit f_1 et f_2 les éléments de $\mathcal{F}$ définis par

$$f(x) = \text{e}^x \cos\frac{\pi}{2}x \quad \text{et} \quad f_2(x) = \text{e}^x \sin\frac{\pi}{2}x.$$

Soit E l'ensemble des applications f telles que $f = af_1 + bf_2$ $(a,~b)$ étant un élément quelconque de $\mathbb{R}^2$.

1. Démontrer que E est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}$ et que $\mathcal{B} = \left(f_1,~f_2\right)$ est une base de E.

2. a. Démontrer que tout élément de E est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que son application dérivée est élément de E.
   b. Soit d l'application de E dans E qui à tout élément de E associe son application dérivée.Démontrer que d est un endomorphisme de E. Écrire sa matrice dans la base $\mathcal{B}$.
   c. Vérifier que d est une bijection de E sur E. Écrire, dans la base $\mathcal{B}$, la matrice de la bijection réciproque d^{-1}. En déduire une primitive sur $\mathbb{R}$ d'un élément quelconque de E.

Partie B

1. Soit φ l'application de E × E dans $\mathbb{R}$ définie par

$$\forall (f,\ g) \in \mathrm{E} \times \mathrm{E}, \varphi(f,\ g) = \int_0^2 \mathrm{e}^{-2x} f(x)g(x)\,\mathrm{d}x.$$

   a. Montrer que φ est une forme bilinéaire symétrique.
   b. Calculer $\varphi\left(f_1,\ f_1\right)$; $\varphi\left(f_2,\ f_2\right)$; $\varphi\left(f_1,\ f_2\right)$.
   c. Écrire $\varphi(f,\ g)$ en fonction des coordonnées de f et g dans la base $\mathcal{B}$.
   d. En déduire que φ est un produit scalaire dans E et que $\mathcal{B}$ est, pour ce produit scalaire, une base orthonormée.

2. E muni de ce produit scalaire est un espace vectoriel euclidien que l'on oriente par la base orthonormée directe $\mathcal{B}$.

   Démontrer que $d = h \circ r = r \circ h$ où h est l'homothétie vectorielle de rapport $\sqrt{1 + \dfrac{\pi^2}{4}}$ et r une rotation vectorielle. Montrer qu'une mesure en radians de l'angle de r appartient à $\left]-\dfrac{\pi}{2}\ ;\ 0\right[$ On notera α cette mesure.

3. En déduire que, pour toute application f de coordonnées $(a,\ b)$ dans la base $\mathcal{B}$, quel que soit x de $\mathbb{R}$

$$f'(x) = \sqrt{1 + \frac{\pi^2}{4}}\mathrm{e}^x \left[\cos\left(\frac{\pi}{2}x - \alpha\right) + b\sin\left(\frac{\pi}{2}x - \alpha\right)\right].$$

Partie C

On se propose d'étudier l'élément f_1 de E, c'est-à-dire l'application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par

$$f_1(x) = \mathrm{e}^x \cos\frac{\pi}{2}x.$$

Soit $\mathcal{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthogonal $\left(\mathrm{O}\ ;\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$ tel que $\left\|\vec{\imath}\right\| = 4\left\|\vec{\jmath}\right\|$.

On appelle Γ et Γ' les courbes qui, dans ce repère, ont respectivement pour équations cartésiennes

$$y = \mathrm{e}^x \quad \text{et} \quad y = -\mathrm{e}^x.$$

1. **a.** Démontrer que, pour tout x de $\mathbb{R}$, $-\mathrm{e}^x \leqslant f_1(x) \leqslant \mathrm{e}^x$.

   b. Calculer les abscisses des points communs aux courbes Γ et $\mathscr{C}$.

   Démontrer qu'en chacun de ces points les courbes Γ et $\mathscr{C}$ ont la même tangente.

   c. Faire la même étude pour les courbes Γ' et $\mathscr{C}$.

2. Calculer les abscisses des points d'intersection de la courbe $\mathscr{C}$ et de la droite de repère $\left(\mathrm{O}~;~\vec{\imath}\right)$.

3. Utiliser le résultat obtenu dans B 3., pour écrire, quel que soit x de $\mathbb{R}$,

$$f_1(x) = \sqrt{1 + \frac{\pi^2}{4}}\mathrm{e}^x \cos\left(\frac{\pi}{2}x - \alpha\right).$$

   Étudier f_1 sur l'intervalle $[-1~;~3]$.

   Tracer l'arc de la courbe $\mathscr{C}$ correspondant à cet intervalle. (On pourra prendre -1 comme valeur approchée de α).