Durée : 4 heures

∽ Baccalauréat C juin 1982 Toulouse ∾

EXERCICE 1 **4 points**

Soit E un espace vectoriel euclidien de dimension 3 rapporté à une base orthonormée $\mathcal{B} = \left(\overrightarrow{\imath},\ \overrightarrow{\jmath},\ \overrightarrow{k}\right)$; on considère l'endomorphisme f de E défini par

$$\left\{\begin{array}{lcl} f(\overrightarrow{\imath}) & = & -\overrightarrow{\imath}\,;\\ f(\overrightarrow{\jmath}) & = & (\sin\theta)\cdot\overrightarrow{\jmath} + (\cos\theta)\cdot\overrightarrow{k}\,;\qquad \text{avec}\,\theta \in [0\,;\,2\pi[\\ f(\overrightarrow{k}) & = & (-\cos\theta)\cdot\overrightarrow{\jmath} + (\sin\theta)\cdot\overrightarrow{k}\,. \end{array}\right.$$

1. Démontrer que f est une isométrie vectorielle de E.
2. Démontrer l'existence d'une valeur unique de θ telle que f soit une symétrie orthogonale par rapport à un plan vectoriel; on précisera ce plan.

EXERCICE 2 **4 points**

1. Résoudre dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes l'équation

$$z^2 - \frac{4}{\sin t}z + \frac{13}{\sin^2 t} - 9 = 0.$$

   z désigne l'inconnue, t désigne un paramètre réel de l'intervalle $]0\,;\,\pi[$.

2. Dans le plan affine euclidien, muni d'un repère $\left(\text{O}\,;\ \overrightarrow{\imath},\ \overrightarrow{\jmath}\right)$ orthonormé, on considère le point M mobile d'affixe

$$z = \frac{2}{\sin t} + 3\text{i}\cot\text{g}\,t,\qquad t\,\text{décrivant l'intervalle}\,]0\,;\,\pi[.$$

   a. Soit T la trajectoire du mobile; démontrer que T est une partie d'une courbe dont on précisera les éléments caractéristiques.
   Préciser et construire T.

   b. Calculer les coordonnées du vecteur vitesse $\overrightarrow{\text{V}}$ à l'instant t et déterminer t pour que $\left\|\overrightarrow{\text{V}}\right\| = 3$.

PROBLÈME **12 points**

Soit $\mathcal{F}$ l'ensemble des fonctions réelles continues sur $\mathbb{R}$. On sait que $(\mathcal{F},\ +,\ \cdot)$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ et que tout élément de $\mathcal{F}$ est intégrable sur tout intervalle borné de $\mathbb{R}$.
À toute fonction f, élément de $\mathcal{F}$, on associe la suite réelle définie sur $\mathbb{N}$ par

$$U_0(f) = \int_{-1}^{1} f(x)\,\text{d}x$$

et, pour $n \geqslant 1$,

$$U_n(f) = \int_{-1}^{1} x^n f(x)\,\text{d}x.$$

Partie A

Dans cette partie on note f la fonction exponentielle de base e.

$$\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & & \longmapsto & f(x) = \mathrm{e}^x, \end{array}$$

g la fonction, élément de $\mathscr{F}$, définie par

$$\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & & \longmapsto & g(x) = x\mathrm{e}^x, \end{array}$$

et on désigne par $\mathscr{E}$ l'ensemble des fonctions

$$h = af + bg \quad \text{où } (a,\ b) \in \mathbb{R}^2.$$

1. Calculer $U_0(f)$, puis $U_1(f)$ grâce à une intégration par parties.

2. Établir, pour $n \geqslant 1$, la relation

$$U_{n+1}(f) = \mathrm{e} + \frac{(-1)^n}{\mathrm{e}} - (n+1)U_n(f).$$

3. Démontrer que $\mathscr{E}$ est un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel $(\mathscr{F},\ +,\ \cdot)$ et que B $= (f,\ g)$ est une base de $\mathscr{E}$.

4. Établir que, quelle que soit la fonction h élément de $\mathscr{E}$, il existe une fonction H telle que

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad H(x) = \int_{-1}^{1} h(x+t)\,\mathrm{d}t.$$

Démontrer que H appartient à $\mathscr{E}$ et que H est l'image de h par une application linéaire de $\mathscr{E}$ dans $\mathscr{E}$ dont on précisera la matrice dans la base B.

(Cette partie est indépendante des deux suivantes).

Partie B

Dans cette partie, on désigne par φ la fonction

$$\begin{array}{rccc} \varphi: & \left]-\dfrac{\pi}{2}\ ;\ \dfrac{\pi}{2}\right[& \to & \mathbb{R} \\ & y & \longmapsto & \varphi(y) = \mathrm{tg}\, y. \end{array}$$

1. Démontrer que φ admet une fonction réciproque notée Φ dont on donnera l'ensemble de définition (on ne cherchera pas à expliciter $\Phi(x)$).

2. Démontrer que Φ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que sa fonction dérivée Φ' vérifie

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \Phi'(x) = \frac{1}{1+x^2}.$$

3. Montrer que Φ' appartient à $\mathscr{F}$ et calculer $U_0(\Phi')$, $U_1(\Phi')$ et $U_2(\Phi')$.

4. **a.** Montrer que, si n est impair, $U_n(\Phi') = 0$.

   b. Montrer que, si n est pair,

$$U_n(\Phi') \leqslant \frac{2}{n+1}$$

   et en déduire $\lim\limits_{n \to +\infty} U_n(\Phi')$.

Partie C

1. f étant un élément quelconque de $\mathscr{F}$, on considère la fonction F de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad F(x) = \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t.$$

   a. Montrer que F est un élément de $\mathscr{F}$.

   b. Montrer que $U_0(f) = F(1) - F(-1)$.

   c. Calculer $U_n(F)$ en fonction de $F(1)$, de $F(-1)$ et de $U_{n+1}(f)$.

2. Soit Φ la fonction définie au B.

   a. Montrer que, si n est pair, $U_n(\Phi) = 0$.

   b. Calculer $U_1(\Phi)$ sans nouvelle intégration.

   c. Calculer $\lim\limits_{n \to +\infty} U_{2n+1}(\Phi)$.