

Durée : 4 heures

∞ Baccalauréat C Toulouse septembre 1971 ∞

EXERCICE 1

Soit le nombre complexe $z = -6\sqrt{3}(1+i)$.

Calculer le module et l'argument de ce nombre. Donner sous forme trigonométrique, puis sous forme cartésienne, les racines cubiques du nombre z .

EXERCICE 2

Dans le plan rapporté à un repère orthonormé, on donne les deux points $I(-1; 0)$ et $J(1; 0)$. Soit un point $C(m; 0)$ variable sur l'axe des abscisses ($m \in \mathbb{R}$).

1. Comment faut-il choisir m pour que le point C puisse être le centre d'un cercle noté (C_m) du faisceau à points limites I et J ?

Écrire l'équation du cercle (C_m) .

2. On attribue au paramètre m les valeurs $+2$ et -3 , auxquelles sont associés les deux cercles (C_2) et (C_{-3}) du faisceau précédent.

Dterminer l'ensemble des points M du plan, tels que

$$\mathcal{P}_{MI(C_2)} + 2\mathcal{P}_{MI(C_{-3})} = 0.$$

N.-B. - $\mathcal{P}_{MI(C_2)}$ et $\mathcal{P}_{MI(C_{-3})}$ représentent les puissances du point M respectivement par rapport aux cercles (C_2) et (C_{-3}) .

PROBLÈME

Dans tout ce problème, on étudie la fonction

$$\alpha \mapsto \frac{5\alpha - 3}{\alpha + 1} = 5 - \frac{8}{\alpha + 1},$$

pour des ensembles de départ A et d'arrivée B , qui seront précisés au début de chaque partie de l'énoncé.

Partie A

Dans toute cette question, on suppose $A = \mathbb{N}^*$ (ensemble des entiers naturels autres que 0) et $B = \mathbb{Q}$ (ensemble des rationnels).

On définit ainsi une fonction qui, à un entier n , fait correspondre un rationnel-image, r , tel que

$$r = \frac{5n - 3}{n + 1} = 5 - \frac{8}{n + 1}.$$

1. Pour quelles valeurs de n le rationnel r est-il entier? Déterminer les valeurs correspondantes de r .

2. a. Démontrer que le plus grand diviseur commun des deux nombres $5n - 3$ et $n + 1$ est nécessairement un diviseur du nombre 8.
- b. En déduire que, si n est pair, $5n - 3$ et $n + 1$ sont premiers entre eux.
- c. Quels sont les entiers n pour lesquels le plus grand diviseur commun de $5n - 3$ et $n + 1$ est 8?

Partie B

Dans toute cette partie, on suppose $A = B = \mathbb{R}$ (ensemble des nombres réels) et l'on note f la fonction qui, au réel x différent de -1 , associe

$$f(x) = \frac{5x - 3}{x + 1}.$$

1. Étudier les variations de la fonction f et tracer sa représentation graphique (H) dans un repère orthonormé.
2. Calculer les coordonnées des points d'intersection de la courbe (H) et de la droite d'équation $y = x$.

Calculer l'aire de l'ensemble des points $M(x; y)$, tels que

$$1 \leq x \leq 3 \quad \text{et} \quad x \leq y \leq f(x).$$

Partie C

Dans cette question, $A = B = \mathbb{C}$ (ensemble des complexes). Au nombre complexe $z = x + iy$ différent de -1 correspond

$$Z = X + iY = \frac{5z - 3}{z + 1}.$$

Dans le plan complexe, au point m d'affixe z correspond le point M d'affixe Z .

1. Calculer le carré du module de Z en fonction de x et de y . Former l'équation de l'ensemble (C) des points m pour lesquels le module de Z est 3.
2. Calculer X et Y en fonction de x et de y . Former l'équation de l'ensemble (Γ) des points m pour lesquels Z est un nombre imaginaire pur. Vérifier que les courbes (C) et (Γ) sont orthogonales.
3. Retrouver géométriquement les résultats des deux questions précédentes en faisant intervenir les points P et Q d'affixes respectives -1 et $\frac{3}{5}$.