

Durée : 4 heures

∞ Baccalauréat C Toulouse septembre 1975 ∞

EXERCICE 1

Étant donné un réel α , on considère les suites réelles $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définies par :

$$\begin{cases} u_0 & \in \mathbb{R} \\ u_{n+1} & = \frac{2}{5}u_n + 3, \quad \forall n \in \mathbb{N} \\ v_n & = u_n + \alpha \end{cases}$$

1. Calculer v_{n+1} en fonction de v_n et α . Comment choisir α pour que v_n soit une suite géométrique?
2. Calculer u_n en fonction de u_0 et n . En déduire la limite de u_n quand n tend vers $+\infty$.

EXERCICE 2

Résoudre, dans le corps des complexes, l'équation :

$$(1 + \cos 2\theta)z^2 - (2 \sin 2\theta)z + 2 = 0$$

où θ est un nombre réel donné tel que $0 \leq \theta < 2\pi$.

Déterminer, suivant les valeurs de θ , le module et l'argument des racines de cette équation, quand elles existent.

PROBLÈME

\mathcal{P} est le plan affine euclidien rapporté à un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

On appelle T l'application affine de \mathcal{P} qui à tout point M de coordonnées $(x; y)$ associe $M' = T(M)$ de coordonnées $(x'; y')$ avec :

$$\begin{cases} x' & = ax + cy \\ y' & = bx + dy \end{cases}$$

où a, b, c, d sont quatre entiers relatifs vérifiant la relation (R) : $ad - bc = 1$.

\mathcal{T} est l'ensemble des applications T obtenues en donnant aux entiers relatifs a, b, c, d toutes les valeurs vérifiant (R).

Partie A

1. Montrer que \mathcal{T} , muni de la loi de composition des applications, est un groupe.
2. Quelle condition doivent vérifier a et d pour que T admette plus d'un point invariant?
Préciser alors l'ensemble des points invariants par T (on considèrera les deux cas $a = 1, a \neq 1$).

Partie B

Soit A le point de coordonnées $(1; 0)$, A' le point de coordonnées $(3; 4)$. On considère le sous-ensemble \mathcal{F} de \mathcal{T} des applications T telles que $T(A) = A'$.

1. Montrer que \mathcal{F} est l'ensemble des applications, notées f_k ($k \in \mathbb{Z}$), associant au point $M(x; y)$ le point $M'(x'; y')$ tel que :

$$\begin{cases} x' = 3x + (2 + 3k)y \\ y' = 4x + (3 + 4k)y \end{cases}$$

2. Définir l'application réciproque de f_k . Appartient-elle à \mathcal{F} ?
3. Déterminer l'entier relatif k , de telle sorte qu'il existe une droite D de points invariants par f_k . Préciser D .
4. On donne à k la valeur -1 et on note $f = f_{-1}$.
- a. M étant un point du plan d'image $M' = f(M)$ distincte de M , que peut-on dire de la direction définie par $\overrightarrow{MM'}$. Quelle est la transformée par f d'une droite de vecteur directeur \vec{j} ? En déduire une construction géométrique de l'image M' d'un point quelconque M du plan.
- b. On considère la fonction numérique φ de la variable réelle x :

$$x \longmapsto \varphi(x) = \frac{7}{2} \left(x - 2 + \frac{1}{x} \right).$$

Étudier les variations de φ et construire sa courbe représentative (H) dans le repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

Former l'équation de la courbe (H') transformée de (H) par f . Montrer que (H') est une conique dont on précisera la nature. Déterminer ses éléments remarquables et la construire; vérifier que (H') passe par A' et déterminer la tangente en ce point.

(Les deux courbes pourront être dessinées sur deux figures distinctes).