∽ Baccalauréat C Toulouse septembre 1976 ∾

EXERCICE 1

1. Déterminer suivant les valeurs de l'entier naturel m, les restes dans la division euclidienne par 16 des entiers : 5^m, 6^m.

2. Soit (u_n) la suite arithmétique de raison 16 et de premier terme $u_0 = 9$, et $\left(v_p\right)$ la suite géométrique de raison 5 et de premier terme $v_0 = 1$.
Démontrer que ces deux suites ont une infinité de termes égaux dont on calculera les deux premiers,

3. Soit $\left(u'_n\right)$ la suite arithmétique de raison 16 et de premier terme $u'_0 = 8$, et $\left(v'_p\right)$ la suite géométrique de raison 6 et de premier terme $v'_{o0} = 9$.
Démontrer que ces deux suites n'ont qu'un seul terme commun que l'on déterminera,

EXERCICE 2

Le plan vectoriel $\overrightarrow{\mathrm{P}}$ étant rapporté à la base $\left(\overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{\jmath}\right)$, on considère les endomorphismes p et q de $\overrightarrow{\mathrm{P}}$ ayant respectivement pour matrices A et B dans la base $\left(\overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{\jmath}\right)$.

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

1. Démontrer que p et q sont des projections vectorielles et déterminer les sous-espaces vectoriels de P qui les caractérisent.

2. On considère l'ensemble F des endomorphismes $f_{(a,b)}$ de $\overrightarrow{\mathrm{P}}$ tels que :

$$f_{(a,b)} = ap + bq, \quad (a\,;\,b) \in \mathbb{R}^2$$

a. Donner une condition sur a et b pour que $f_{(a,b)}$ soit une bijection, et démontrer que le sous-ensemble des bijections de F muni de la composition des applications est un groupe abélien.

b. Démontrer que $f_{(1,-1)}$ et $f(-1,1)$ sont des symétries vectorielles et déterminer les sous-espaces vectoriels de $\overrightarrow{\mathrm{P}}$ qui les caractérisent.

PROBLÈME

Partie A

Calculer les trois intégrales :

$$\int_0^1 \mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x, \qquad \int_0^1 x\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x, \qquad \int_0^1 x^2\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x$$

En déduire que si $g(x) = x(x+2-\mathrm{e})$, alors $\displaystyle\int_0^1 g(x)\,\mathrm{d}x = 0$.

Partie B

Si t est un nombre réel fixé, on considère la fonction de la variable réelle x

$$f_t(x) = (x-t)\mathrm{e}^{\frac{x}{2}}$$

Soit E l'ensemble des couples $(t_1\,;\, t_2)$ de $\mathbb{R}^2$ tels que $\displaystyle\int_0^1 f_{t_1}(x) f_{t_2}(x)\,\mathrm{d}x = 0$.

1. Montrer en utilisant la fonction g de la partie A que E n'est pas vide.

2. Démontrer qu'un élément $(t_1\,;\, t_2)$ de $\mathbb{R}^2$ appartient à E si et seulement si

$$(\mathrm{e}-1)\,t_1\,t_2 - (t_1+t_2) + \mathrm{e} - 2 = 0.$$

Écrire cette condition sous la forme :

$$(t_1-\alpha)\,(t_2-\alpha) = -k^2 \qquad (1)$$

où α et k sont des réels que l'on calculera (pour établir l'existence de k^2, on pourra vérifier l'inégalité $(\mathrm{e}-1)^2 > \mathrm{e}$ en utilisant l'encadrement $2,7 < \mathrm{e} < 2,8$).

3. En étudiant le signe de $f_{t_1}(x) f_{t_2}(x)$ sur $[0\,;\,1]$, démontrer que si $(t_1\,;\, t_2)$ appartient à E, l'un au moins des deux réels t_1 ou t_2 appartient à $[0\,;\,1]$.

Partie C

Dans un plan affine euclidien P rapporté à un repère orthonormé $\left(\mathrm{O}\,;\, \vec{\imath},\, \vec{\jmath}\right)$, on désigne par A_t le point de coordonnées $(t\,;\,0)$.

1. Démontrer en utilisant (1) qu'il existe deux points du plan, I et J , tels que $(t_1\,;\, t_2)$ appartient à E si et seulement s

$$\overrightarrow{\mathrm{I}A_{t_1}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{I}A_{t_2}} = \overrightarrow{\mathrm{J}A_{t_1}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{J}A_{t_2}} = 0.$$

2. Établir que $(t_1\,;\, t_2)$ appartient à E si et seulement si le cercle de diamètre $\left[A_{t_1},\, A_{t_2}\right]$ passe par I et J.

3. Calculer à l'aide d'une remarque géométrique simple le minimum de $|t_2 - t_1|$ quand $(t_1\,;\, t_2)$ décrit E.

4. Déduire du 2. par une interprétation géométrique du B 1. ou B 3. que I et J appartiennent au disque de diamètre $[A_0,\, A_1]$.

N. B. - Il est conseillé de faire des figures dans cette partie.