Baccalauréat C Toulouse septembre 1977

EXERCICE 1 **4 POINTS**

Soit E l'anneau $Z/33\mathbb{Z}$; la classe d'un entier n sera notée $\overline{n}$.

1. Soit f l'application de E dans E définie par :

$$f(x) = \overline{17}x + \overline{9}.$$

Trouver l'inverse de $\overline{17}$.
Résoudre dans E l'équation : $f(x) = \overline{0}$.
Montrer que f est une bijection dont on donnera la bijection réciproque.

2. Soit g l'application de E dans E définie par :

$$g(x) = \overline{22}x + \overline{7}.$$

Quel est l'ensemble des images des éléments de E par g ?

EXERCICE 2 **4 POINTS**

Soient f et g les fonctions numériques de la variable réelle x définie par :

$$\begin{array}{rcl} f(x) & = & x - 1 + \dfrac{\text{Log } x}{x} \\ g(x) & = & x^2 + 1 - \text{Log } x. \end{array}$$

1. Montrer que, pour tout nombre réel strictement positif x, on a : $g(x) > 0$.
(On pourra montrer que g passe par un minimum strictement positif).
Étudier la fonction f et la représenter graphiquement dans un plan affine euclidien muni d'un repère orthonormé.
Construire les tangentes à la courbe représentative de f aux points d'abscisses 1 et e.
2. Calculer l'aire $F(a)$ du domaine limité par la courbe représentative de f et les droites d'équations $y = x - 1$, $x = 1$ et $x = a$ (a étant un réel strictement positif).
Déterminer a pour que $F(a)$ soit égale à 1.

PROBLÈME **12 POINTS**

Partie A

Soit V un plan vectoriel euclidien de base orthonormée directe $\left(\overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{\jmath}\right)$.
À tout nombre réel k, on associe l'endomorphisme F_k de V dont la matrice relativement à la base $\left(\overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{\jmath}\right)$ est

$$A_k = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 2 + 2k & 4k - 1 \\ 4 - k & -2 - k \end{pmatrix}$$

Soient $\overrightarrow{u} = 2\overrightarrow{\imath} - \overrightarrow{\jmath}$ et $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{\imath} + 2\overrightarrow{\jmath}$ deux vecteurs de V.

1. Montrer qu'il existe un réel positif λ tel que $\overrightarrow{u'} = \lambda \overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v'} = \lambda \overrightarrow{v}$ forment une base orthonormée directe de V.
   Déterminer les images par F_k de $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$.
   En déduire pour quelle valeur de k l'application F_k n'est pas bijective; déterminer alors son image et son noyau.
2. Pour quelle valeur de k, l'application F_k est-elle involutive? Caractériser l'application obtenue.
3. Pour quelles valeurs de k, l'application F_k est-elle une transformation orthogonale? Caractériser chaque fois l'application obtenue.

Partie B

Soit P le plan affine euclidien de repère orthonormé $\left(\text{O}\,;\ \overrightarrow{\imath},\ \overrightarrow{\jmath}\right)$. L'affixe du point M de P de coordonnées $(x\,;\ y)$ est le nombre complexe $z = x + \text{i}y$, $\left(\text{i}^2 = -1\right)$.

1. Soit f l'application de P dans P qui, au point M d'affixe z, associe le point M' d'affixe z' déterminée par :

$$z' = \frac{4+3\text{i}}{5}\overline{z} - 1 + 3\text{i} \quad \left(\overline{z} = x - \text{i}y \text{ est le conjugué de } z = x + \text{i}y\right)$$

   Montrer que f est une symétrie orthogonale par rapport à une droite dont on donnera l'équation,
2. À tout réel non nul α, on associe l'application g_α et qui, au point M d'affixe z, associe le point M' d'affixe z' donnée par : $z' = \text{i}\alpha z + 2$.
   a. Reconnaître la nature de l'application g_α et la caractériser. Soit ω_α le point invariant de g_α. Quel est l'ensemble des points ω_α quand α décrit l'ensemble des réels non nuls? (On pourra utiliser l'image O$'$ du point O par g_α).
   b. On définit, pour tout entier naturel n, le point M_n par $M_0 = \text{O}$,
   $M_{n+1} = g_{\frac{1}{2}}\left(M_n\right)$.
   Soit $z_n = x_n + \text{i}y_n$ l'affixe de M_n et a l'affixe du point A, point invariant de $g_{\frac{1}{2}}$.
   Montrer que la suite (u_n) définie par $u_n = |z_n - a|$ est géométrique.
   ($|z_n - a|$ désigne le module du nombre complexe $z_n - a$).
   En déduire les limites des suites (u_n), (x_n) et $\left(y_n\right)$ quand n tend vers l'infini.