

Durée : 4 heures

∞ Baccalauréat C Toulouse septembre 1985 ∞

EXERCICE 1

4 points

Soit  $f$  la fonction numérique de la variable réelle  $x$  telle que :

$$\begin{cases} f(x) = -x & \text{si } x \leq 0 \\ f(x) = -x \ln x & \text{si } 0 < x \leq e \\ f(x) = e - 2x & \text{si } x > e. \end{cases}$$

1.
  - a. Étudier la continuité et la dérivabilité de  $f$  sur  $\mathbb{R}$ .
  - b. Étudier les variations de  $f$  et tracer sa courbe représentative dans un repère orthonormé (unité : 2 cm).
2. Soit  $\alpha$  un nombre réel de l'intervalle  $]0; 1[$ .
  - a. Calculer  $\int_{\alpha}^1 f(x) dx$ . (On pourra faire une intégration par parties.)
  - b. En déduire l'aire de l'ensemble des points du plan de coordonnées  $(x; y)$  tels que

$$\begin{cases} \alpha \leq x \leq 1 \\ 0 \leq y \leq f(x) \end{cases}$$

(On donnera le résultat en  $\text{cm}^2$ .)

- c. Cette aire admet-elle une limite lorsque  $\alpha$  tend vers 0?  
In désigne la fonction logarithme népérien.

EXERCICE 2

4 points

Étant donnés deux points distincts  $F$  et  $F'$  du plan  $P$ , dans tout cet exercice, on appelle ellipse de foyers  $F$  et  $F'$  l'ensemble des points  $N$  de  $P$  tels que :  $NF + NF' = 2a$  où  $a$  est un réel strictement positif vérifiant  $2a > FF'$ .

Soit  $B$  et  $F$  deux points donnés distincts du plan.

1. Quel est l'ensemble  $C$  des points  $O$  tels qu'il existe une ellipse de centre  $O$ , vérifiant les deux conditions suivantes :
  - (i) ses deux foyers sont distincts et l'un d'eux est  $F$ .
  - (ii)  $B$  est l'un des sommets du petit axe.
2. Quel est, pour ces ellipses, l'ensemble des foyers distincts de  $F$ .
3. Pour une ellipse  $E$  vérifiant les conditions (i) et (ii) la droite  $BF'$  recoupe  $E$  en un point  $M$  distinct de  $B$ . Montrer que les demi-droites  $F'B$  et  $F'M$  sont opposées. Montrer que  $M$  reste situé sur une ellipse fixe quand  $E$  varie.

PROBLÈME

12 points

On se propose d'étudier l'effet d'une similitude sur une configuration géométrique plane

**Partie A**

1. a. Résoudre dans  $C$  l'équation :

$$8z^3 - 8(1+i)z^2 + 6iz + (1-i) = 0,$$

sachant qu'elle admet une solution réelle.

- b. Représenter les images A, B, C des solutions dans le plan complexe de façon que le repère  $(O; \overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OC})$  soit de sens direct.  
Quelle est la nature du quadrilatère OABC?

2. Soit  $s$  la similitude directe de centre O, de rapport  $\sqrt{2}$ , d'angle de mesure  $\frac{\pi}{4}$  (unité : le radian).

- a. Faire une figure représentant les images du carré OABC par :

$$s, \quad s^2 = s \circ s, \quad s^3 = s \circ s^2, \quad s^4 = s \circ s^3.$$

(Aucune justification n'est demandée.)

- b. Soit M le point de coordonnées  $(x; y)$  et M' celui de coordonnées  $(x'; y')$ ; exprimer  $x'$  et  $y'$  en fonction de  $x$  et de  $y$  lorsque :  $M' = s(M)$ .  
c. Déterminer l'image  $D_1$  de la droite (BC) par  $s$  et en donner une équation cartésienne.  
d. Même question pour  $D'_1$  image de la droite (BC) par  $s^2$ .
3. Soit E l'ensemble des points du plan dont les coordonnées  $(x; y)$  vérifient

$$0 \leq x \leq \frac{1}{2} \quad \text{et} \quad 0 \leq y \leq \frac{1}{2}$$

On note  $u_0$  l'aire de E,  $u_1$  l'aire de  $s(E)$ . Plus généralement on note  $u_n$  l'aire de  $s^n(E)$  pour  $n$  entier naturel.

Quelle est l'expression de  $u_n$  en fonction de  $n$  et quelle est la nature de la suite  $(u_n)$ ?  
Cette suite converge-t-elle?

**Partie B**

On étudiera ici une courbe et des problèmes associés.

Soit  $f$  la fonction numérique de la variable réelle  $x$  telle que

$$f(x) = x + \sin \pi x.$$

On appelle  $\mathcal{C}$  la courbe représentative de  $f$  dans P.

1. a. Démontrer qu'il existe au moins une translation  $t$  dont on précisera le vecteur et telle que  $t(\mathcal{C}) = \mathcal{C}$ .  
b. Démontrer que  $\mathcal{C}$  admet au moins un centre de symétrie.

2. Soit  $f_1$  la restriction de  $f$  à  $[0; 1]$ . Soit  $\Gamma_1$  la courbe représentative de  $f_1$  dans  $\mathbb{P}$ . Étudier le sens de variation de  $f_1$  et tracer la courbe  $\Gamma_1$ . Préciser les tangentes à la courbe  $\Gamma_1$  aux points d'abscisses  $0$ ,  $\frac{1}{2}$  et  $1$ .
3. a. Montrer que pour tout  $x$  réel on a la double inégalité

$$(1) \quad x - 1 \leq f(x) \leq x + 1.$$

- b. Quelle est la limite de  $f$  quand  $x$  tend vers  $+\infty$  (respectivement vers  $-\infty$ ).
4. a. Interpréter géométriquement la double inégalité (1).  
b. Tracer la courbe  $\mathcal{C}$ ; préciser en particulier les tangentes aux points d'intersections de  $\mathcal{C}$  avec  $D_1$  ( $D_1$  a été définie au A, 2., c.)
5. a. Calculer l'aire de la partie du plan définie par :

$$\begin{cases} 0 \leq x \leq 1 \\ 0 \leq y \leq f(x) \end{cases}$$

b. Soit  $S_n = \sum_{p=1}^n \frac{1}{p} \left[ \frac{p}{n} + \sin \frac{p}{n} \pi \right]$ .

Déduire du a. la limite de  $S_n$  lorsque  $n$  tend vers  $+\infty$ .