

Durée : 4 heures

∞ Baccalauréat C Toulouse septembre 1969 ∞

Le candidat doit traiter LES DEUX EXERCICES et LE PROBLÈME

I

On considère la fonction suivante :

$$f : x \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right] \mapsto f(x) = \sqrt{4 + \cos x} - x - 1.$$

Existe-t-il des nombres x tels que $f(x) = 0$?

II

On considère l'application f de l'ensemble \mathbb{C} des nombres complexes dans lui-même qui, au nombre complexe $z = a + ib$, où a et b sont, des nombres réels et $i^2 = -1$, associe le nombre complexe

$$f(z) = e^a(\cos b + i \sin b).$$

Étant donné un nombre complexe Z , de module r et d'argument θ , quel est l'ensemble des nombres complexes z tels que $f(z) = Z$?

L'application f est-elle surjective; injective ?

Quelle est la relation qui lie $f(z)$, $f(z')$ et $f(z + z')$ si z et z' sont deux nombres complexes ?

III

Dans un plan orienté rapporté à un repère orthonormé $x'Ox$, $y'Oy$, de vecteurs unitaires \vec{i} et \vec{j} , on considère un cercle fixe (Γ) , de centre O et de rayon R .

À tout point M de (Γ) , repéré par la mesure algébrique de l'angle $(\vec{i}, \overrightarrow{OM})$, dont θ désigne une détermination, on associe son symétrique, N , par rapport à $x'Ox$. Soit F un point fixe de (Γ) , n'appartenant pas à $x'Ox$, et soit φ une détermination de la mesure algébrique de l'angle $(\vec{i}, \overrightarrow{OF})$. On suppose $0 < \varphi < \pi$.

Partie A

On cherche à déterminer les points M de (Γ) tels que $MN = MF$.

1. Utiliser le fait que l'égalité $MN = MF$ se traduit par le fait que les mesures algébriques des angles $(\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{ON})$ et $(\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{OF})$ sont égales ou opposées pour montrer l'existence, en général, de quatre solutions, M_0, M_1, M_2, M_3 , dont trois, M_0, M_1 et M_2 sont sommets d'un triangle équilatéral.

Dans quels cas n'y a-t-il que trois solutions ?

2. Retrouver ces résultats en établissant les égalités

$$MN^2 = 4R^2 \sin^2 \theta \quad \text{et} \quad MF^2 = 2R^2 [1 - \cos(\varphi - \theta)]$$

et en résolvant une équation trigonométrique ayant pour inconnue θ .

Calculer les angles (Ox, OX) et (Ox, OY) , où OX et OY désignent les droites bissectrices des angles (OM_0, OM_1) et (OM_2, OM_3) .

En déduire que les angles de droites (Ox, M_0M_1) et (Ox, M_2M_3) sont opposés.

Partie B

On cherche, plus généralement, à déterminer les points M de (Δ) tels que $MF = \frac{e}{2}MN$, où e est un nombre positif donné.

1. Montrer que cette égalité est réalisée si, et seulement si,

$$2 \sin \frac{\theta - \varphi}{2} = \pm e \sin \theta.$$

2. Étudier les variations de la fonction

$$\theta \mapsto z = \frac{\sin \frac{\theta - \varphi}{2}}{\sin \theta}$$

quand $-\pi \leq \theta \leq \pi$.

Montrer, en particulier, que la dérivée est

$$z' = \frac{\cos^2 \frac{\theta}{2} \cos \frac{\varphi}{2} \left[\operatorname{tg}^3 \frac{\theta}{2} + \operatorname{tg} \frac{\varphi}{2} \right]}{\sin^2 \theta}.$$

En déduire que z présente, pour une valeur négative, θ_0 de θ , un minimum positif, m .

On ne cherchera à calculer ni θ_0 ni m .

Tracer le graphe de la fonction.

En déduire qu'il y a, suivant les valeurs de e , quatre, deux ou trois points M de (Δ) tels que

$$MF = \frac{e}{2}MN.$$