

∞ Baccalauréat C Toulouse septembre 1979 ∞

EXERCICE 1

3 POINTS

Soit S l'ensemble des entiers relatifs n solutions de l'équation :

$$3n^2 + 2n - 1 \equiv 0 \pmod{5}.$$

Déterminer S .

Quel peut être, en base 5, le chiffre des unités de l'écriture d'un entier *naturel* appartenant à S ? Même question en base 10.

EXERCICE 2

4 POINTS

Dans le plan affine euclidien P , on considère un carré (A, B, C, D) tel que $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$; on pourra utiliser les points I et J , milieux respectifs des segments $[B, C]$ et $[A, D]$.

1. Déterminer le barycentre G du système $(A, 1), (B, -3), (C, -3), (D, 1)$.
2. Déterminer l'ensemble des points M de P tels que :

$$\overrightarrow{MA}^2 - 3\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} - 3\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MD} = 0.$$

3. Soit f l'application de P dans P qui, au point M , fait correspondre le point M' défini par :

$$\overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{MA} - 3\overrightarrow{MB} - 3\overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD}.$$

L'application f est-elle une application classique? Si oui, en préciser les éléments caractéristiques.

PROBLÈME

13 POINTS

Les parties B et C sont indépendantes

Dans tout le problème, M est l'espace vectoriel sur \mathbb{R} des matrices carrées d'ordre 2 à coefficients réels, et on considère les quatre éléments de M :

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \Omega = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad J = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$$

et $A = aI + bJ$, où $(a; b)$ est fixé dans \mathbb{R}^2 .

Partie A

1. On considère l'application linéaire φ de \mathbb{R}^2 dans M définie par :

$$(x; y) \longmapsto \varphi(x; y) = xI + yJ.$$

Montrer que φ est injective, que l'image, \mathcal{E} , de φ est un plan vectoriel de base $(I; J)$.

2. Montrer que $J^2 = \Omega$.

Pour les couples $(x; y)$ et $(x'; y')$ de \mathbb{R}^2 , on pose $X = xI + yJ$ et $X' = x'I + y'J$.

Montrer que le produit des matrices X et X' , noté $X \cdot X'$, est élément de \mathcal{E} , et calculer ses coordonnées dans la base $(I; J)$ en fonction de x, y, x' et y' . Est-ce que $X \cdot X' = X' \cdot X$?

Quels sont tous les X de \mathcal{E} tels que $X^2 = \Omega$?

3. On considère l'application linéaire ψ de \mathcal{E} dans lui-même définie par :

$$X \longmapsto \psi(X) = A \cdot X$$

Trouver le noyau de ψ (on distinguera les trois cas : $a \neq 0, a = 0$ et $b \neq 0, a = b = 0$).

Montrer que I appartient à l'image de ψ si et seulement si $a \neq 0$.

4. Soit un entier $n > 0$. Montrer que $A^n = a^n I + n a^{n-1} b J$. (on pourra raisonner par récurrence sur n).

Donner une expression simple de chacune des sommes suivantes :

$$\begin{aligned} P(a) &= 1 + a + a^2 + \dots + a^{n-1}, \text{ pour } n > 0 \text{ et } a \neq 0 \\ P'(a) &= 1 + 2a + 3a^2 + \dots + (n-1)a^{n-2} \text{ pour } n > 1 \text{ et } a \neq 0. \end{aligned}$$

(on distinguera les cas : $a \neq 1$ et $a = 1$.)

En déduire $(\alpha_n; \beta_n)$ élément de \mathbb{R}^2 , défini par :

$$\alpha_n I + \beta_n J = I + A + A^2 + \dots + A^{n-1}.$$

Si on suppose $|a| < 1$, montrer que les limites suivantes :

$$\alpha = \lim_{n \rightarrow +\infty} \alpha_n \quad \text{et} \quad \beta = \lim_{n \rightarrow +\infty} \beta_n$$

existent, et les calculer. (On rappelle que, si $|a| < 1$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} n \cdot a^n = 0$).

Montrer que $\alpha I + \beta J$ est la matrice inverse de la matrice $I - A$, quand $|a| < 1$.

Partie B

On suppose, dans cette partie, que $a > 0$ et que \mathcal{E} est muni d'une structure euclidienne telle que $(I; J)$ soit une base orthonormée.

On définit la fonction vectorielle de \mathbb{R} dans \mathcal{E} :

$$t \longmapsto E(t) = a^t I + t a^{t-1} b J$$

1. Montrer que pour tout $(t; s)$ appartenant à \mathbb{R}^2 , la matrice $E(t+s)$ est le produit $E(t) \cdot E(s)$ des matrices $E(t)$ et $E(s)$.

Que sont $E(0)$ et $E(1)$?

Retrouver l'expression de A^n du A 4. pour n entier positif.

Montrer que $E(-t)$ est l'inverse de $E(t)$.

2. Calculer $E'(t)$, E' étant la fonction vectorielle dérivée de E .
Montrer qu'il existe B appartenant à \mathcal{E} tel que $E'(t) = B \cdot E(t)$ pour tout t ; on exprimera B en fonction de a et b .
3. On suppose $a = b = e$ où e est la base des logarithmes népériens.
Montrer que l'ensemble des couples $(x; y)$ de \mathbb{R}^2 tels qu'il existe un réel t satisfaisant à $E = xI + yJ$ est l'ensemble $\{(x; y); x > 0, y = x \operatorname{Log} x\}$.

Partie C

1. On considère $A_1 = a_1I + b_1J$ et $A_2 = a_2I + b_2J$, éléments de \mathcal{E} .
Montrer que $A_1 \cdot A_2 = \Omega$ si et seulement si : ou bien $A_1 = \Omega$, ou bien $A_2 = \Omega$, ou bien $a_1 = a_2 = 0$.
Trouver tous les $X = xI + yJ$ de \mathcal{E} tels que $(X - A_1) \cdot (X - A_2) = \Omega$ (on distinguera les cas $a_1 \neq a_2$ et $a_1 = a_2$).
2. Soient a_j et b_j ($j \in \mathbb{N}^*$) deux suites de réels. On pose

$$A_j = a_jI + b_jJ$$

- a. On considère l'application linéaire f définie de \mathcal{E} dans \mathbb{R} par :

$$f(X) = x \quad \text{avec } X = xI + yJ.$$

Montrer que $f(X \cdot X') = f(X)f(X')$ pour tous X et X' de \mathcal{E} .

En déduire par récurrence sur n que $f(A_1 \cdot A_2 \cdots A_n) = a_1 a_2 \cdots a_n$.

- b. On suppose que $\forall j, A_j \neq \Omega$. Montrer par récurrence sur n que si $A_1 \cdot A_2 \cdots A_n = \Omega$, il existe i et j éléments distincts de $\{1, 2, \dots, n\}$ tels que $a_i = a_j = 0$; (on utilisera le C 1. a. et le C 2. a.)
Réciproquement, montrer que s'il existe i et j , avec $1 \leq i < j \leq n$ tels que $a_i = a_j = 0$, alors $A_1 \cdot A_2 \cdots A_n = \Omega$.