Baccalauréat C septembre 1981 Toulouse

EXERCICE 1

Soit $U = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite réelle définie par

$$\left\{\begin{array}{lcl} u_0 & = & 0 \\ u_1 & = & 1 \\ u_{n+1} & = & 10u_n - 9u_{n-1} \quad \forall n \in \mathbb{N}^\star \end{array}\right.$$

1. Calculer u_2, u_3, u_4 ?
2. Soit $V = (v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par

$$\forall n \in \mathbb{N} : v_n = u_{n+1} - u_n.$$

   Montrer que V est une suite géométrique.
   Calculer v_n et u_n en fonction de n.
   La suite U est-elle convergente ?
3. Calculer, en fonction de n,

$$S_n = \sum_{i=0}^{n} u_i.$$

EXERCICE 2

Dans un plan affine euclidien P rapporté à un repère orthonormé $\left(\text{O} ; \overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{\jmath}\right)$ les coordonnées d'un point mobile M sont définies, en fonction du temps t, par

$$\forall t \in [1 ; +\infty[\qquad \left\{\begin{array}{lcl} x & = & \dfrac{3}{2}\left(t + \dfrac{1}{t}\right) \\ y & = & 2\left(t - \dfrac{1}{t}\right) \end{array}\right.$$

1. Montrer que la trajectoire du mobile est incluse dans une hyperbole H. (on pourra calculer t et $\dfrac{1}{t}$ en fonction de x et y et en déduire une équation cartésienne de H).
   Préciser les sommets, les asymptotes, les foyers de l'hyperbole et la construire dans le plan P rapporté au repère orthonormé $\left(\text{O} ; \overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{\jmath}\right)$ (unité : 1 cm).
2. Étudier, lorsque t décrit $]1 ; +\infty[$, les variations de l'ordonnée du mobile M.
   Préciser la trajectoire T décrite par M et le sens du mouvement sur cette trajectoire.
3. Calculer, à l'instant t, les coordonnées du vecteur vitesse $\overrightarrow{V(t)}$ et du vecteur accélération $\overrightarrow{\Gamma(t)}$ du mobile M.
   Allure du mouvement de M sur sa trajectoire ?

Problème

Partie A

Soit E un espace vectoriel euclidien de base orthonormée $B = \left(\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$. φ est l'endomorphisme de E défini par

$$\left\{\begin{array}{lcl}\varphi\left(\vec{\imath}\right) & = & \dfrac{1}{3}\left(\vec{\jmath} + \vec{k}\right),\\ \varphi\left(\vec{\jmath}\right) & = & \dfrac{1}{6}\left(-2\vec{\imath} + \vec{k}\right),\\ \varphi\left(\vec{k}\right) & = & \dfrac{1}{6}\left(-2\vec{\imath} - \vec{\jmath}\right)\end{array}\right.$$

$\vec{\omega}$ est le vecteur $\vec{\omega} = \dfrac{1}{3}\left(-\vec{\imath} + 2\vec{\jmath} - 2k\right)$.

1. Dans la base B, un vecteur $\vec{u}$ de coordonnées $(x~;~y~;~z)$ a pour image le vecteur $\varphi\left(\vec{u}\right)$ de coordonnées $\left(x'~;~y'~;~z'\right)$.
   Exprimer x', y' et z' en fonction de x, y et z.
   Montrer que pour tout vecteur $\vec{u}$ de E, $\varphi\left(\vec{u}\right)$ est orthogonal à $\vec{u}$.
2. Déterminer le noyau de φ (noté Ker φ).
   Vérifier que $\left(\vec{\omega}\right)$ est une base de Ker φ.
   Déterminer l'image de φ (notée Im φ).
   Montrer que ces deux sous-espaces vectoriels sont supplémentaires dans E.
3. On pose

$$\left\{\begin{array}{lcl}\vec{I} & = & \dfrac{1}{3}\left(-2\vec{\imath} + \vec{\jmath} + 2\vec{k}\right),\\ \vec{J} & = & \dfrac{1}{3}\left(2\vec{\imath} + 2\vec{\jmath} + \vec{k}\right).\end{array}\right.$$

   Démontrer que $\left(\vec{I}, \vec{J}\right)$ est une base orthonormée de Im φ et que $\left(\vec{I}, \vec{J}, \vec{\omega}\right)$ est une base orthonormée de E.
   (Dans la suite du problème, on notera P l'espace Im φ, et on orientera P à l'aide de la base orthonormée directe $\left(\vec{I}, \vec{J}\right)$.)
4. On note φ_1 l'endomorphisme de P défini par

$$(\forall \vec{u} \in \mathrm{P}), \quad \varphi_1\left(\vec{u}\right) = \varphi\left(\vec{u}\right).$$

   Déterminer la matrice de φ_1 dans la base $\left(\vec{I}, \vec{J}\right)$.
5. Démontrer qu'il existe une projection vectorielle Q de E, telle que, pour tout vecteur $\vec{u}$ de E, on ait :

$$\varphi\left(\vec{u}\right) = \varphi_1\left[Q\left(\vec{u}\right)\right].$$

Partie B

Soit $\mathscr{E}$ un espace affine euclidien associé à E, de repère orthonormé R $= \left(\text{O}\,;\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath},\ \vec{k}\right)$. On note R$'$ le repère orthonormé R$' = \left(\text{O}\,;\ \vec{I},\ \vec{J},\ \vec{\omega}\right)$.

f est l'application affine de $\mathscr{E}$ dans $\mathscr{E}$, laissant le point O invariant, et d'endomorphisme associé φ. $\mathscr{P}$ est le plan affine de repère orthonormé direct $\left(\text{O}\,;\ \vec{I},\ \vec{J}\right)$.

1. Déterminer $f(\mathscr{E})$, image de $\mathscr{E}$ par f.
2. Quel est l'ensemble $\mathscr{D}$ des points M de $\mathscr{E}$, ayant le point O pour image.
   $\mathscr{D}'$ étant une droite parallèle à $\mathscr{D}$, coupant $\mathscr{P}$ en A, quelle est l'image de $\mathscr{D}'$ par f.