Durée : 4 heures

∽ Baccalauréat C Toulouse septembre 1983 ∾

EXERCICE 1

1. Soit f la fonction numérique de la variable réelle x définie dans $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = x\mathrm{e}^{-x} + \mathrm{e}.$$

   Étudier la fonction f et construire la courbe C représentative de f dans un plan rapporté à un repère orthonormé.

2. Calculer le nombre réel $\displaystyle\int_{-1}^{1} f(x)\,\mathrm{d}x$ et donner une interprétation géométrique de ce nombre.

3. Soit g la fonction numérique de la variable réelle x définie dans $\mathbb{R}^{\star}$ par

$$g(x) = -\mathrm{e}^{-x} + \mathrm{e}\ln|x|.$$

   Étudier la fonction g et construire la courbe C$'$ représentative de g dans un plan rapporté à un repère orthonormé.

EXERCICE 2

On considère l'expression

$$f(z) = z^3 - (1-2\mathrm{i})z^2 + (\mathrm{i}-1)z - 2\mathrm{i} - 6$$

où z est un nombre complexe.

1. Montrer que l'équation $f(z) = 0$ admet une solution imaginaire pure, notée z_1.
   Montrer qu'il existe des nombres complexes a et b, tels que

$$f(z) = (z - z_1)\left(z^2 + az + b\right).$$

   En déduire les autres solutions z_2 et z_3 de l'équation $f(z) = 0$.

2. Déterminer un nombre complexe ω, tel que les trois nombres : $z_1 - \omega$, $z_2 - \omega$ et $z_3 - \omega$, aient même module.

PROBLÈME

P désigne un plan rapporté au repère orthonormé $\left(\mathrm{O}~;~\overrightarrow{\imath},~\overrightarrow{\jmath}\right)$ et $\mathcal{V}$ est le plan vectoriel associé à P.

Partie A

On considère les droites vectorielles Δ_1 et Δ_2 engendrées respectivement par
$\overrightarrow{e_1} = \overrightarrow{\imath} + \overrightarrow{\jmath}$ et $\overrightarrow{e_2} = -\overrightarrow{\imath} + \overrightarrow{\jmath}$.
On désigne par E l'ensemble des endomorphismes de $\mathcal{V}$ dont la restriction à Δ_1 est une homothétie vectorielle de rapport k, $k \neq 0$.

1. Démontrer que φ est un élément de E si, et seulement si, sa matrice, relativement à 8, est de la forme

$$\begin{pmatrix} a & k-a \\ b & k-b \end{pmatrix}, \quad (a,\ b) \in \mathbb{N}^2$$

   Pour quelles valeurs de a et b l'endomorphisme φ est-il bijectif?

   Dans toute la suite du problème, φ désigne un élément de E.

2. Lorsque φ n'est pas bijectif, déterminer le noyau de φ, l'image $\varphi(\mathcal{V})$ de $\mathcal{V}$ par φ et l'ensemble des vecteurs invariants par φ.
   (On appelle noyau de φ l'ensemble des antécédents par φ du vecteur nul de $\mathcal{V}$).
3. Pour quelles valeurs de a, b et k, φ conserve-t-il le produit scalaire?
4. On suppose $k \neq 1$. Montrer que le seul élément de E qui laisse invariant $\overrightarrow{e_2}$ est l'application φ_k dont la matrice K dans D est :

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2}(k+1) & \frac{1}{2}(k-1) \\ \frac{1}{2}(k-1) & \frac{1}{2}(k+1) \end{pmatrix}$$

5. Soit $\mathrm{B}' = \left(\overrightarrow{e_1},\ \overrightarrow{e_2}\right)$ avec

$$\overrightarrow{e_1} = \overrightarrow{\imath} + \overrightarrow{\jmath} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{e_2} = -\overrightarrow{\imath} + \overrightarrow{\jmath}.$$

   Vérifier que B$'$ est une base de $\mathcal{V}$. Déterminer la matrice K$'$ de φ_k relativement à B$'$.
   Déterminer la matrice de

$$\varphi_k^n = \underbrace{\varphi_k \circ \varphi_k \circ \cdots \circ \varphi_k}_{n \text{ éléments}}$$

   dans la base B$'$ puis dans la base B.

Partie B

On considère l'application affine f_k, de P dont l'endomorphisme associé φ_k avec $k \neq 1$, a pour matrice relativement à B :

$$\mathrm{K} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}(k+1) & \frac{1}{2}(k-1) \\ \frac{1}{2}(k-1) & \frac{1}{2}(k+1) \end{pmatrix}$$

et qui laisse invariant le point A(1 ; 1).

1. Soit $M'\left(x'\ ;\ y'\right)$ l'image par f_k du point $M(x\ ;\ y)$. Exprimer x' et y' en fonction de x et y.
2. Déterminer et construire l'ensemble D des points invariants par f_k.
3. Soit H la projection orthogonale sur D d'un point M de P.
   Démontrer que $\overrightarrow{\text{H}M'} = k\overrightarrow{\text{H}M}$. Quelle est la nature de f_k ?
4. Soit $M_0\left(x_0\ ;\ y_0\right)$ un point fixe de P.
   On pose $M_1 = f_k\left(M_0\right), M_2 = f_k\left(M_1\right), \ldots, M_n = f_k\left(M_{n-1}\right)$ et on désigne par x_i et y_i les coordonnées du point M_i, $i \in \{0, 1, 2, \ldots, n\}$, $n \in \mathbb{N}$.
   a. Calculer x_n et y_n en fonction de x_0 et y_0.
   b. Lorsque $|k| < 1$, démontrer que les suites $\left(x_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ et $\left(y_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ sont convergentes.
   On note $a = \displaystyle\lim_{x\to+\infty} x_n$ et $b = \displaystyle\lim_{x\to+\infty} y_n$.
   On appelle L le point de coordonnées $(a\ ;\ b)$.
   Démontrer que L est la projection orthogonale de M_0 sur D.

Partie C

On considère les fonctions numériques de la variable réelle x définies dans $\left[-\dfrac{5}{2}\ ;\ \dfrac{5}{2}\right]$ par

$$\begin{aligned} F_1(x) &= \frac{3}{5}x + \frac{2}{5}\sqrt{25-4x^2}\\ F_2(x) &= \frac{3}{5}x - \frac{2}{5}\sqrt{25-4x^2}\end{aligned}$$

1. Étudier F_1 et construire la courbe représentative $\mathcal{C}_1$ de F_1 dans le plan P rapporté au repère orthonormé $\left(\text{O}\ ;\ \overrightarrow{\imath},\ \overrightarrow{\jmath}\right)$.
   Préciser les tangentes à $\mathcal{C}_1$ aux points d'abscisse respective $-\dfrac{5}{2}$ et $\dfrac{5}{2}$.
2. Démontrer que, dans P, la courbe représentative $\mathcal{C}_2$ est symétrique de $\mathcal{C}_1$ par rapport à l'origine. Construire $\mathcal{C}_2$.
3. On pose $\mathcal{C} = \mathcal{C}_1 \cup \mathcal{C}_2$. Démontrer qu'une équation de $\mathcal{C}$ est :

$$5x^2 + 5y^2 - 6xy - 20 = 0.$$

4. Déterminer une équation de $f_{\frac{1}{2}}(\mathcal{C})$, identifier $f_{\frac{1}{2}}(\mathcal{C})$.