Durée : 4 heures

Baccalauréat C Toulouse juin 1969

EXERCICE 1

Étant donné un entier naturel n, on considère les deux nombres a et b tels que

$$a = 2n^2 \quad \text{et} \quad b = n(2n+1).$$

On désigne par d le PGCD de a et b, par m leur PPCM.
Montrer que l'on a

$$b - a = d \quad \text{et} \quad b^2 - a^2 = m - d^2.$$

EXERCICE 2

On donne deux cercles orthogonaux, (Γ) et $\left(\Gamma'\right)$, sécants en A et B. Soit I un point de (Γ), J un point de $\left(\Gamma'\right)$, distincts de A et de B. On suppose, en outre, les trois points I, J et A, d'une part, I, J et B, d'autre part, non alignés.
Déterminer les inverses du cercle (Γ) et des cercles circonscrits aux triangles IJA et IJB dans l'inversion de pôle I qui laisse invariant le cercle $\left(\Gamma'\right)$.
Déduire de ce qui précède l'orthogonalité des cercles circonscrits aux triangles IJA et IJB.

PROBLÈME

On considère, dans un repère cartésien $x\text{O}y$, la courbe (C) représentative de la fonction

$$y = x^3.$$

1. **a.** Écrire l'équation de la tangente en un point M de (C) d'abscisse x. Si a désigne l'abscisse, différente de zéro, d'un point M_0 de (C), appliquer le calcul précédent à la détermination de l'abscisse du point de contact, M_1, de (C) avec la tangente à (C) contenant M_0 et distincte de la tangente à (C) en M_0.

   Peut-on donner une interprétation analogue dans le cas où $a = 0$?

   b. On pose $x_0 = a$, $y_0 = a^3$. On note T l'application de (C) dans (C) qui, au point M_0, fait correspondre le point M_1 défini ci-dessus et l'on définit de proche en proche le point M_n par les formules

   $$M_1 = T\left(M_0\right),\, M_2 = T\left(M_1\right), \ldots,\, M_n = T\left(M_{n-1}\right).$$

   Si $\left(x_n, ;\, y_n\right)$ sont les coordonnées de M_n calculer x_n en fonction de x_{n-1} et y_n en fonction de y_{n-1}.
   En déduire les expressions de x_n et y_n en fonction de a et n.

c. Exprimer, en fonction de a et n, les coordonnées, x_n et y_n du barycentre, G_n, des points M_0, M_1, ..., M_n affectés de coefficients égaux à 1.

Quelle est la position limite de G_n quand l'entier n augmente indéfiniment ?

d. Calculer le birapport des quatre droites OM_n, OM_{n+1}, OM_{n+2}, OM_{n+3} en fonction de x_n et vérifier qu'il est indépendant de a et de n.

2. **a.** Montrer qu'une solution quelconque de l'équation différentielle

$$(1) \qquad y' + y\text{Log}\,2 = 0$$

(Log désignant le logarithme népérien)
est de la forme

$$y = \lambda \mathrm{e}^{-x\text{Log}\,2},$$

où λ est une constante.
On désigne par (γ_λ) la courbe représentative de la fonction

$$y = \lambda \mathrm{e}^{-x\text{Log}\,2}.$$

De même, une solution quelconque de l'équation différentielle

$$(2) \qquad y' + 3y\text{Log}\,2 = 0$$

est de la forme

$$y = \mu \mathrm{e}^{-3x:\text{Log}\,2},$$

où μ est une constante.
On désigne par (γ_μ) la courbe représentative de la fonction

$$y = \mu \mathrm{e}^{-3x:\text{Log}\,2},$$

b. Les nombres x_n et y_n étant ceux définis au 1, b pour $a = 1$, montrer que les points I_0 de coordonnées $(0\ ;\ +1)$, I_1 de coordonnées $(+1\ ;\ x_1)$, ..., I_n de coordonnées $(n\ ;\ x_n)$ appartiennent, pour tout entier naturel n, à l'une ou l'autre de deux courbes (γ_λ).

Peut-on énoncer un résultat analogue pour les points J_0 de coordonnées $(0\ ;\ +1)$, J_1 de coordonnées $(+1\ ;\ y_1)$, ..., J_n de coordonnées $(n\ ;\ y_n)$?