Durée : 4 heures

∽ Baccalauréat C juin 1975 Viet Nam ∾

EXERCICE 1

Soit f la fonction numérique de la variable réelle x définie par

$$f\,:\,x \longmapsto x\mathrm{e}^{-x^2}$$

1. Étudier cette fonction et construire sa courbe représentative (Γ) dans le plan rapporté à un repère orthonormé $\left(\mathrm{O}\,;\,\vec{\imath},\,\vec{\jmath}\right)$.
2. Calculer

$$S(\lambda) = \int_0^{\lambda} f(x)\,d\mathrm{d}x$$

   λ étant un nombre réel positif.
   Calculer : $\displaystyle\lim_{\lambda \to +\infty} S(\lambda)$.

EXERCICE 2

1. Résoudre l'équation $\overline{2}\,\cdot\,x = \overline{0}$ dans $\mathbb{Z}/8\mathbb{Z}$.
2. Résoudre le système :

$$\left\{\begin{array}{rcl}\overline{2}x+\overline{3}y &=& \text{é}\overline{5}\\ \overline{4}x+\overline{3}y &=& \text{é}\overline{1}\end{array}\right.$$

   dans $\mathbb{Z}/8\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/8\mathbb{Z}$.

PROBLÈME

Soit (Π) un plan affine euclidien orienté, $\left(\mathrm{O}\,;\,\overrightarrow{e_1},\,\overrightarrow{e_2}\right)$ un repère orthonormé direct de (Π).
Pour tout couple de réels $(x\,;\,y)$ le nombre complexe $x+\mathrm{i}y$ est appelé affixe du point M de (Π) de coordonnées x et y.
Soit T l'application de (Π) dans (Π) qui associe à tout point M d'affixe z le point $T(M)$ d'affixe :

$$\mathcal{T}(z) = \frac{\mathrm{i}}{2}\left(\overline{z}+3\right)$$

($\overline{z}$ désigne le nombre complexe conjugué de z).

Partie A

1. **a.** Quelle est la nature de T ?
   b. Déterminer le point A, le réel strictement positif k, et la droite Δ passant par A tels que T soit la composée de l'homothétie de centre A, de rapport k et de la symétrie orthogonale par rapport à Δ.

2. Quelles sont les droites orthogonales à leurs transformées par T ?

Partie B

1. Soit Δ_0 la droite passant par O et de vecteur directeur $\overrightarrow{e_1}$.

a. Quel est l'ensemble des affixes des points de Δ_0 ?

Quelle est la transformée de Δ_0 par T ?

b. En utilisant les nombres complexes, démontrer qu'il existe une similitude directe et une seule S_0 telle que, pour tout point M de Δ_0' on ait :

$$S_0(M) = T(M)$$

Si z est l'affixe d'un point M de (Π), quelle est l'affixe du point $S_0(M)$?

Donner les coordonnées du centre C_0 de S_0 ainsi que le rapport et l'angle de cette similitude.

Démontrer que pour tout point M de Δ_0 les points O, M, $T(M)$ et C_0 sont cocycliques.

2. Soit $\left(\Delta'\right)$ une droite du plan (Π).

a. Déterminer les deux similitudes du plan (Π) qui laissent invariants tous les points de $\left(\Delta'\right)$.

b. Démontrer que pour deux similitudes f et g du plan (Π) les deux propositions suivantes sont équivalentes :

1re proposition

« pour tout point M de $\left(\Delta'\right)$, $\quad f(M) = g(M)$ »

2e proposition

« $f^{-1} \circ g$ est l'application identique dans (Π) ou la symétrie orthogonale par rapport à $\left(\Delta'\right)$ ».

3. a étant un réel, soit (Δ_a) la droite passant par O et de vecteur directeur

$$\cos a\,.\,\overrightarrow{e_1} + \sin a\,.\,\overrightarrow{e_2}.$$

a. En utilisant les résultats de (B - 2.), démontrer qu'il existe une similitude et une seule S_a autres que T, telle que, pour tout point M de (Δ_a)

$$S_a(M) = T(M)$$

b. z étant l'affixe d'un point M de (Π), déterminer l'affixe z_a de l'image de M par la symétrie orthogonale $\sum_a$ d'axes (Δ_a) puis l'affixe du point $S_a(M)$.

Montrer que S_a est une similitude directe.

Donner le centre, le rapport et l'angle de cette similitude.

c. Soit B un point du plan d'affixe non nulle b.

Démontrer que l'ensemble des points $\sum_a(\text{B})$, lorsque a décrit $\mathbb{R}$, est un cercle.

En déduire l'ensemble des points $S_a(\text{B})$.