Durée : 4 heures

Baccalauréat C Vietnam septembre 1975

Exercice 1

1. Déterminer les trois nombres réels a, b, c tels que l'on ait, quel que soit le réel x :

$$8x^4+6x^2+2=\left(2x^2+x+1\right)\left(ax^2+bx+c\right)$$

2. En déduire, qu'en base neuf, $\overline{80602}^{\text{(neuf)}}$ est divisible par $\overline{211}^{\text{(neuf)}}$ et écrire, dans cette base, le quotient du premier nombre par le second.

Exercice 2

Soit E un espace vectoriel euclidien orienté de dimension 3, rapporté à une base orthonormée directe $\left(\vec{\imath}\,,\ \vec{\jmath}\,,\ \vec{k}\right)$.
On désigne par :
R_1 : la rotation vectorielle dont l'axe est défini et orienté par $\vec{\imath}$ et dont une détermination en radian de l'angle est $-\dfrac{\pi}{2}$.
R_2 : la rotation vectorielle dont l'axe est défini et orienté par $\vec{\jmath}$ et dont une détermination en radian de l'angle est $\dfrac{\pi}{2}$.
S : la symétrie vectorielle par rapport à la droite vectorielle déterminée par $\vec{k}$.

1. Nature de $T=S\circ R_2\circ R_1$.
2. Soit $\vec{v}\in E$; exprimer les coordonnées $\left(x'\ ;\ y'\ ;\ z'\right)$ du vecteur $T\left(\vec{v}\right)$ en fonction des coordonnées $(x\ ;\ y\ ;\ z)$ de $\vec{v}$.
3. Déterminer les vecteurs invariants de T.

Problème

N. B. : Les questions 2.,3.,4.,5. sont indépendantes

On considère la fonction numérique d'une variable réelle f telle que

$$f(x)=\frac{x^2-2x}{x^2-x+2}$$

1. Étudier cette fonction. On montrera que la fonction dérivée première s'annule pour les valeurs $(-2-2\sqrt{2})$ et $(-2+2\sqrt{2})$.
   Construire la courbe représentative (C) de f dans un plan P muni d'un repère orthogonal $\left(\text{O}\ ;\ \vec{\imath}\,,\ \vec{\jmath}\right)$. On prendra pour unité : 2 cm sur l'axe des abscisses et 4 cm sur l'axe des ordonnées.
   Placer les points d'intersection de (C) avec les axes, avec l'asymptote et les points correspondant aux extrema de f. On donnera les coordonnées de ces points au $\dfrac{1}{100}$ près par défaut.

2. Soit (D) la droite d'équation $y = kx$. Étudier le nombre de points d'intersection de (D) et (C).

   Donner les équations des tangentes à (C) issues de O et les coordonnées des points de contact de ces tangentes avec (C).

3. Donner, suivant les valeurs du paramètre m, le nombre de points d'intersection de (C) avec la droite (D) d'équation $y = m$.

   Quand (D) coupe (C) en deux points M et M', déterminer les coordonnées du milieu I de MM'. Déterminer par son équation cartésienne l'ensemble des points I, lorsque m décrit $\mathbb{R}$. Courbe représentative.

4. Calculer la dérivée seconde de f et les racines de l'équation $f''(x) = 0$.

   Montrer que les trois points de (C) qui ont pour abscisses ces racines sont alignés.

5. Dans le plan affine euclidien P muni du repère $\left(\text{O}~;~\vec{\imath},~\vec{\jmath}\right)$, on considère le mouvement du point M de coordonnées $(x~;~y)$ défini par l'application de $[-1~;~+\infty[$ dans P telle que :

$$\left\{\begin{array}{l c l} x(t) & = & \dfrac{2(t-1)}{t+3}\\ y(t) & = & \dfrac{-4(t-1)}{t^2+7}\end{array}\right.$$

   a. Quelle est la trajectoire du point M ? (On précisera les limites de cette trajectoire pour $t \in [-1~;~+\infty[$.

   b. Donner les composantes du vecteur vitesse de M.

   Etudier la limite du vecteur vitesse quand t tend vers $+\infty$.