le bulletin de l'APMEP - N° 527

AU FIL DES MATHS

de la maternelle à l'université...

Édition mars-avril 2018

Tiré à part
— · —
6 000 exemplaires

LA MULTIPLICATION

APMEP

Association des Professeurs de Mathématiques de l'Enseignement Public

ASSOCIATION
DES PROFESSEURS DE MATHÉMATIQUES
DE L'ENSEIGNEMENT PUBLIC

26 rue Duméril, 75013 Paris
Tél. : 01 43 31 34 05 - Fax : 01 42 17 08 77
Email : secretariat-apmep@orange.fr - Site : www.apmep.fr
Présidente d'honneur : Christiane ZEHREN

Au fil des maths, c'est aussi une revue numérique augmentée :
www.apmep.fr
version réservée aux adhérents, pour y accéder connectez-vous à votre compte avec le QRcode ou suivez les logos.

Si vous désirez rejoindre l'équipe d'Au fil des maths ou bien proposer un article, écrivez à aufildesmaths@apmep.fr

ÉDITORIAL

ÉQUIPE DE RÉDACTION

Directrice de publication : *Alice ERNOULT*.

Responsable coordinatrice de l'équipe : *Lise MALRIEU*.

Rédacteurs : *Marie-Astrid BÉZARD, Richard CABASSUT, Séverine CHASSAGNE-LAMBERT, Mireille GÉNIN, Cécile KERBOUL, Valérie LAROSE, Lise MALRIEU, Jean-Marie MARTIN, Vincent PANTALONI, Henry PLANE, Daniel VAGOST.*

« Fils rouges » numériques : *Paul ATLAN, Laure ETEVEZ, Jean-Pierre GERBAL, Adrien GUINEMER, Simon LE GAL, Julien MARCEAU, Harmia SOILIHI.*

Illustrateurs : *Pol LE GALL, Olivier LONGUET, Jean-Sébastien MASSET*.

Équipe TEXnique : *François COUTURIER, Isabelle FLAVIER, Anne HEAM, François PÉTIARD, Olivier REBOUX, Guillaume SEGUIN, Sébastien SOUCAZE, Michel SUQUET*.

Relations avec le Bureau national : *Catherine CHABRIER*.

Votre adhésion à l'APMEP vous abonne automatiquement à Au fil des maths.
Pour les établissements, le prix de l'abonnement est de 60 € par an.
La revue peut être achetée au numéro au prix de 15 € sur la boutique en ligne de l'APMEP.

Mise en page : Olivier REBOUX
Dépot légal : mars 2018
Impression : Imprimerie Horizon P.A. de la plaine de Jouques 200 avenue de Coulin 13420 GEMENOS.

Éditorial

De la maternelle à l'université, enseigner les mathématiques est un métier passionnant, avec ses côtés enthousiasmants mais aussi sa part de difficulté. Passionnant parce qu'il s'agit de permettre à nos élèves d'accéder à des concepts abstraits et pourtant ancrés dans le réel, de se poser des questions (et de tenter d'y répondre), de construire des raisonnements sûrs... Quelle satisfaction de voir dans leurs yeux la fierté d'avoir dépassé une difficulté ou résolu un problème ! Cependant, nous rencontrons tous aussi des moments où nous nous sentons pris en défaut, où les idées nous manquent pour mieux gérer nos classes ou préparer nos cours. Par peur d'être jugés, ou ne sachant pas vers qui nous tourner, nous pouvons ressentir une grande solitude face à ces situations. Qui de mieux placés que des collègues pour nous comprendre, nous conseiller, nous accompagner ? Nous pouvons aussi connaître des moments de découragement quand nous ne trouvons pas le soutien nécessaire pour mener à bien certains projets.

De nombreux adhérents témoignent régulièrement du rôle que joue l'APMEP dans leur quotidien professionnel. Ce peut être par des rencontres avec d'autres adhérents, au sein de leur Régionale ou lors des Journées Nationales par exemple. Les occasions sont nombreuses d'échanger autour de questions pédagogiques, didactiques ou mathématiques, chacun apportant son lot d'expériences et de questions, professeur des écoles ou enseignant-chercheur, professeur en classe préparatoire ou en lycée professionnel, au collège ou au lycée général et technologique. Ce peut être aussi par l'utilisation de ressources produites par des équipes au sein de l'association et disponibles sur le site apmep.fr.

Adhérer à l'APMEP, c'est enrichir son environnement professionnel, pouvoir exprimer ses doutes sans avoir peur d'être jugé, partager son expérience avec des collègues d'horizons très divers, mais aussi, pour ceux qui le souhaitent, participer à des projets, à des productions de ressources, à l'élaboration des positions de l'association... L'association ne vit que des cotisations de ses adhérents et de la ggvente de brochures, alors si vous voulez soutenir son fonctionnement, n'hésitez pas à nous rejoindre et à parler de l'APMEP autour de vous !

Alice Ernoult

Présidente de l'APMEP

Le mot de la rédaction

L'Association des Professeurs de Mathématiques de l'Enseignement Public a le plaisir de vous offrir cet échantillon de son nouveau bulletin. En 2018, le voici en effet qui change de nom et de maquette et qui gagne en couleurs : c'est l'occasion de le découvrir ou de le redécouvrir !

Chaque numéro de notre bulletin sous le titre « Au fil des maths » sera organisé autour d'un « fil rouge ». En mars, ce sera « la multiplication ». En juin, ce sera « mathématiques et langages ».

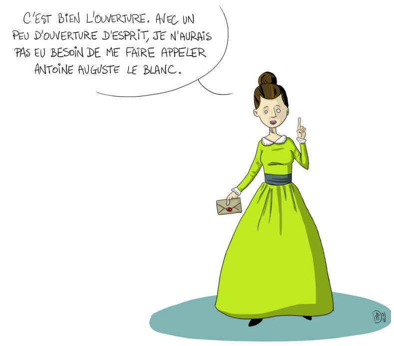
Comme les autres ressources produites par l'APMEP, notre revue a une raison d'être qui est aussi son ambition : accompagner au mieux votre vie professionnelle, vous apporter des idées, des ressources pédagogiques, mais aussi de belles mathématiques, vous permettre d'actualiser vos connaissances didactiques, vous proposer des points de vue d'experts, des sujets de réflexion de fond sur notre métier et sa place dans la société, vous faire découvrir des acteurs variés du monde mathématique et d'autres disciplines. Avec un enjeu : que chacun d'entre vous, quel que soit le niveau où il enseigne, trouve dans notre publication matière à intérêt !

Plus qu'une revue papier, « Au fil des maths » se décline aussi sous un format numérique, qui en fait une revue augmentée. Organisée autour d'actualités et de dossiers « fils rouges » régulièrement mis à jour, la version numérique est conçue pour devenir une référence sur le long terme. Elle est accessible uniquement aux adhérents de l'APMEP.

Vous pourrez découvrir dans cet échantillon les nouvelles rubriques de la revue papier :

OPINIONS : des débats sur l'actualité de l'enseignement, des paroles d'experts

AVEC LES ÉLÈVES : des activités de classe, des analyses didactiques, des échanges de pratiques pour tous niveaux



OUVERTURES : des mathématiques pour réfléchir ou pour sortir des sentiers battus, des découvertes, des liens avec d'autres disciplines

RÉCRÉATIONS : des jeux pour vous et vos élèves, des énigmes et problèmes, des curiosités mathématiques

AU FIL DU TEMPS : des éléments d'histoire des mathématiques, des rendez-vous réguliers, des recensions, des anniversaires

Vous êtes déjà adhérent de l'APMEP ?

L'abonnement à la revue sous ses deux formats est compris dans l'adhésion à l'association. Vous n'avez aucune démarche à effectuer.

Vous n'êtes pas encore adhérent ?

Vous trouverez le bulletin d'adhésion sur la troisième de couverture.

Si vous ne souhaitez pas adhérer, vous pouvez vous abonner à la revue à titre privé ou faire abonner votre établissement. Dans ces cas, vous ne recevrez que le format papier.

Nous espérons que cet échantillon vous mettra en appétit et que vous compterez prochainement parmi nos lecteurs et auteurs réguliers. N'hésitez pas à nous envoyer vos courriers et propositions d'articles.

Bonne lecture !

L'équipe de rédaction

Réflexions sur l'enseignement des mathématiques

Ce texte a pour vocation d'enrichir les positions de l'APMEP dans le cadre de la réflexion nationale sur l'enseignement des mathématiques. Il sera examiné en Comité national puis soumis au vote.
Cette réflexion attire l'attention sur des composantes qui nous semblent essentielles pour construire des programmes d'enseignement des mathématiques et qui n'enferment pas les pratiques de classe dans des « méthodes » déconnectées du contexte socio-culturel concerné.

Commissions premier degré et collège de l'APMEP

> « Le mathématicien est avant tout un créatif, un créateur. Un mathématicien excellent, par rapport au bon mathématicien, c'est un mathématicien qui crée, comprend, réécrit et voit les choses sous un angle nouveau. »
> Cédric Villani, *Les mathématiques sont la poésie des sciences*, L'arbre de Diane, 2015.

Faire des mathématiques

Faire des mathématiques, c'est *chercher*, *modéliser*, *représenter*, *raisonner*, *calculer*, *communiquer*.

Chercher est l'activité fondamentale du mathématicien (même en herbe). Elle impose de **modéliser**, ce qui nécessite de **représenter**. L'activité de **raisonnement** repose sur les différents modes de représentation possibles. Des activités de traitement de l'information internes à ces différents registres imposent notamment de **calculer**. La **communication**, pour soi-même, à une date ultérieure (mémoire), mais surtout pour les autres (la communauté extérieure), vient parachever l'activité du mathématicien.

C'est pourquoi nos deux commissions sont en parfait accord avec le choix de ces six verbes qui définissent clairement, et pour la première fois dans des instructions officielles, l'activité mathématique du cycle 2 au cycle 4 et au-delà (puisque les mêmes verbes sont utilisés au lycée).

Ces six verbes constituent ainsi le cadre que nous avons choisi pour analyser la question du « faire des mathématiques » et donc de l'enseignement des mathématiques.

Mathématiques et société

L'analyse du « faire des mathématiques » doit prendre en compte la nature même de la société en lien avec ses choix politiques. Les mathématiques ne vivent pas en autarcie. Elles se développent, s'enseignent, se pratiquent et s'utilisent dans une société, la société française. En tant que telles, elles développent des valeurs qui visent des finalités du « vivre ensemble », des évolutions techniques et technologiques, etc. Elles peuvent aplanir ou au contraire renforcer les inégalités.

La société française est sensible aux évaluations internationales (PISA, PIRLS, TIMSS) et nationales (CEDRE) qui lui font un retour négatif de l'enseignement des mathématiques. Ces évaluations montrent notamment la faiblesse de la prise en charge des élèves en difficulté.

> Un constat de rupture entre la société et les mathématiques, entre la société et l'enseignement des mathématiques, a rendu nécessaire une information citoyenne sur le rôle des mathématiques dans la société et une formation spécifique des enseignants.

La « Stratégie mathématiques » (Éduscol, 4 décembre 2014) a défini dix mesures clés articulées autour de trois axes de travail à partir de ces constats. La rédaction des programmes (mars et novembre 2015) qui en découle réalise un accord entre *mathématiques et société*, *mathématiques et citoyen*, *mathématiques et autres disciplines*, dont l'articulation essentielle se fait autour de la langue française et des langages.

APMEP

« [. . .] Il y a un autre paradoxe français qui est que, malgré notre difficulté dans l'enseignement, nous avons l'une des toutes meilleures écoles de recherche pédagogique en mathématiques du monde. La France truste quelque chose comme un quart ou un cinquième des récompenses les plus prestigieuses décernées dans le monde en recherche pédagogique [. . .] donc, dans un projet tel qu'il est présenté par madame la Ministre et par son équipe, il y a eu la volonté, telle qu'on l'a ressentie, d'associer fortement, et pour la première fois à notre connaissance à ce niveau, la recherche pédagogique française à la conception et à l'accompagnement des méthodes de l'enseignement de l'Éducation nationale, et ça c'est un évènement qui en soi nous semble très important, la volonté d'accompagner cela ensuite dans la durée avec la communauté. », affirme Cédric Villani faisant l'éloge du changement de paradigme de l'enseignement des mathématiques[1].

Dans ses interventions, le mathématicien fait souvent référence à la nécessaire créativité pour faire des mathématiques. Cette créativité, qui est le fruit de contraintes imposées par la situation de recherche peut, dans l'enseignement, faire référence aux « situations-problèmes ». Ces situations permettent de donner du sens aux mathématiques, de construire des concepts à partir desquels un entrainement intense complémentaire est absolument nécessaire.

> L'indispensable développement de la créativité par la fréquentation de problèmes dits de recherche va de pair avec l'acquisition de connaissances, de savoir-faire et d'une automatisation de techniques de base.

Imagination et **créativité**, **compétences** et **connaissances** se construisent de manière dialectique.

Enseigner les mathématiques

Si les mathématiques sont universelles, leur enseignement est intimement lié à la culture du pays. Cette culture émane notamment de l'histoire, de l'histoire de l'enseignement et de la langue dans laquelle cet enseignement est donné[2].

Par exemple, on dispose en mandarin d'un signe particulier, indépendant des signes précédents pour représenter le nombre désigné par *dix*, alors qu'en français et dans le système usuel de numération, le signe en écriture chiffrée qui désigne le même nombre *dix* est composé des deux signes élémentaires, le 0 et le 1. Cette différence est illustrée par le tableau ci-après. Dans un enseignement en langue française, il est nécessaire de construire l'écriture chiffrée du dix contrairement à un enseignement en mandarin où un symbole (aussi arbitraire que les précédents) désigne le nombre dix. Cet exemple cité ci-dessus impose, en France, la construction du nombre zéro et la construction explicite de l'écriture composée *10*, alors que cette dernière n'est pas nécessaire en mandarin. De manière analogue, un travail explicite doit être fait en français sur la désignation orale des noms de nombres alors que celle-ci est élémentaire en mandarin en raison de l'absence d'irrégularités (onze, vingt, soixante-et-onze, quatre-vingt-seize, etc.)

一	1	六	6
二	2	七	7
三	3	八	8
四	4	九	9
五	5	十	10

Des cultures différentes peuvent afficher des finalités éducatives identiques pour l'enseignement des mathématiques. Cependant, leur mise en œuvre doit tenir compte des cultures et faits linguistiques.

Les pratiques enseignantes actuelles sont le fruit de l'histoire de l'enseignement en France, histoire marquée notamment par des expériences variées. Certaines pratiques peuvent s'inspirer par exemple de Célestin Freinet tandis que d'autres s'appuient sur des ouvrages qui, par mimétisme à une forme scolaire « canonique », sont relativement uniformes. Cette relative uniformité des ouvrages scolaires est vraisemblablement fondée sur une attente sociale forte, tant du point de vue des enseignants que de celui des parents d'élèves. Pour autant il n'existe pas « une méthode française ». Ces constats imposent d'interroger les pratiques d'enseignement des mathématiques et les outils mis à disposition des élèves, des enseignants et des parents.

Il convient de veiller à ce que les pratiques engagent un enseignement propre à développer les six compétences mathématiques. La formation des enseignants doit tenir compte de ce changement de paradigme : questionner la reproduction de la forme scolaire se révèle essentiel pour questionner la place donnée, en classe, à des activités de recherche. Il ne suffit pas que soit mentionnée la conformité au programme 2016 sur les manuels, mention qui relève des éditeurs eux-mêmes, pour que cette conformité soit réelle. Les programmes stipulent que la résolution de problèmes est au

1. 4 décembre 2014, présentation de la « Stratégie mathématiques », Najat Vallaud-Belkacem et Cédric Villani, *EducationFrance* (vidéo consultée le 20 janvier 2018).
2. Le projet international Lexicon interroge les pratiques enseignantes au regard de la langue vernaculaire d'enseignement.

cœur de l'activité mathématique et donc à l'origine d'un enseignement qui donne sens aux notions, ce que relativement peu d'ouvrages pratiquent.

Il faut d'autre part, et de manière complémentaire, former les enseignants (formation initiale ou formation continue) à la fois aux contenus mathématiques enseignés à l'école, aux retombées des recherches en didactique des mathématiques et à l'analyse des ressources pédagogiques (ouvrages imprimés, articles sur internet, etc.), afin de leur permettre d'effectuer en toute connaissance de cause leurs indispensables choix pédagogiques.

Ces choix doivent être guidés par les contextes de classe qui varient extrêmement de zones « favorisées » à des zones classées REP+ (sans insinuer ici que l'ensemble des élèves en difficulté appartient à un REP+).

La réflexion engagée par la « Stratégie mathématiques » portant sur la nature de l'activité mathématique et sa transposition en classe mérite de prendre du temps, du recul, et de mettre en place les recherches nécessaires avant de prendre dans l'urgence des décisions qui pourraient, à terme, se révéler contre-productives.

Paris, le 20 janvier 2018

> *La rubrique « Opinions » se veut un lieu de débat. Si ce texte vous fait réagir, n'hésitez pas à nous envoyer vos avis et arguments.*

Des bâtons pour multiplier

Dans cet article, les auteures partagent une de leurs expériences passées autour de la fabrication de bâtons de Neper par des élèves dans le cadre d'une liaison CM2/6e, puis de l'usage fait en classe lorsqu'elles enseignaient toutes deux au collège Louise Weiss de Nozay (91).

Séverine Chassagne-Lambert et Valérie Larose

Les liaisons école-collège peuvent prendre des formes diverses et variées. Au collège de Nozay (91), elles avaient lieu sous forme de rencontres régulières au collège entre classes de 6e et de CM2. Une progression annuelle permettait de traiter de nombreux thèmes du programme, la manipulation étant systématiquement privilégiée : planches à clous, pliages, découpages... et bâtons de Neper ! En fin d'année, une sortie commune à Paris comportait une visite au Musée des Arts et Métiers : des bâtons de Neper y sont exposés et un atelier avec un animateur du musée permet d'en comprendre le fonctionnement (bâtons géants en bois manipulables).

Lors d'une de ces rencontres, après avoir présenté le matériel et la vidéo de Nathalie Daval qui explique très bien comment utiliser les bâtons de Neper, il ne restait plus qu'à :

- fabriquer son set de bâtons ;
- l'utiliser !

> Pour notre liaison, nous avions choisi de faire fabriquer par chaque élève un set de quatre bâtons de Neper.

Pour cela, nous leur fournissions les bâtons en bois brut... des pavés droits à section carrée : 10 cm de hauteur pour 1 cm de base issus de tasseaux découpés puis poncés au préalable (bref, un peu de bricolage en amont !). Chaque bâton ayant 4 faces rectangulaires, on peut « saisir » quatre tables par bâton, une par face. Deux options se présentent alors :

- n°1 : écrire les tables directement sur les bâtons,
- n°2 : écrire les tables sur un tableau fourni qui sera ensuite plié puis collé sur le bâton.

L'option n°1 implique du soin : un même écart entre deux résultats de sorte que l'on puisse lire les produits au final, un stylo qui ne bave pas sur le bois et aucune erreur dans les tables, le correcteur ou la gomme n'étant pas très efficaces. Le résultat est plus proche du matériel utilisé par Neper et résistera mieux aux manipulations.

L'option n°2 implique du soin au pliage puis au collage de la feuille sur le tasseau de bois : par contre, en cas d'erreur dans les tables, on peut redistribuer un tableau vierge à compléter (voir la Figure 1).

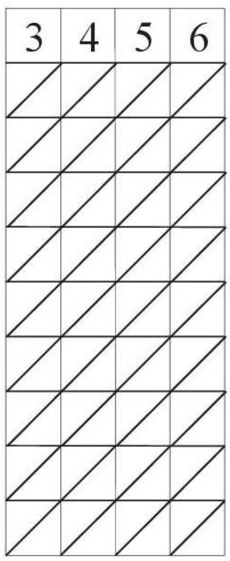


Figure 1 : *Modèle de feuille à découper, compléter et coller*

Si le travail des tables à compléter peut être réalisé à la maison ou en classe, nous avons préféré accompagner les élèves et notamment montrer quelques propriétés permettant de retrouver certains résultats :

- la table des 6 est le double de la table des 3. Donc si on a 3 × 7, on a facilement 6 × 7 ;
- les résultats des tables de 2 ; 4 ; 6 et 8 sont tous pairs ;
- etc.

Il y a systématiquement deux cases pour chaque produit. Certains élèves s'interrogent lorsqu'ils n'ont qu'un chiffre à écrire : dans quelle case écrire le 8 de 4 × 2 ? Écrire 08 pour 0 dizaine et 8 unités permet à certains d'entre eux de mieux comprendre notre système d'écriture des nombres.

Une fois les tables remplies, il faut plier soigneusement la feuille puis la coller sur le bâton... une activité manuelle qui réserve des surprises !

Vient ensuite le temps des calculs...

On commence par des produits où l'un des facteurs ne comprend qu'un seul chiffre et bien sûr on exige au préalable un ordre de grandeur du résultat.

Un produit du type 453 × 6 permet de jongler avec les retenues et de revenir sur notre système de numération (voir la Figure 2) :

- on a 6 × 3 soit 18 unités soit 1 dizaine et 8 unités (le « je pose 8 et je retiens 1 »)
- puis 6 × 5 + 1 en attente soit 31 dizaines soit 1 dizaine et 3 centaines (« je pose 1 et je retiens 3 »)
- et enfin 6 × 4 + 3 soit 27 centaines.

Les élèves plébiscitent cette manière de faire, nous constatons un taux de réussite plus élevé que lors de la multiplication posée.

Les élèves se questionnent rapidement : comment effectuer des produits de facteurs ayant tous au moins deux chiffres ? Comment faire avec des décimaux ?

Quelques exemples :

- Effectuer le produit 48 × 26
  C'est l'occasion de réfléchir et de travailler la décomposition d'un entier en base 10 :

  $$48 \times 26 = (40 + 8) \times 26 = 40 \times 26 + 8 \times 26$$

  Ainsi pour calculer 48 × 26, les élèves utiliseront les bâtons 4, 8, 2 et 6 pour calculer 8 × 26 et 4 × 26 ; ils déduiront 40 × 26 puis ajouteront le résultat des produits partiels : 40 × 26 + 8 × 26.
  On pourra alors revenir sur la technique de la multiplication posée en faisant écrire systématiquement les produits partiels effectués et ainsi redonner du sens à la technique.

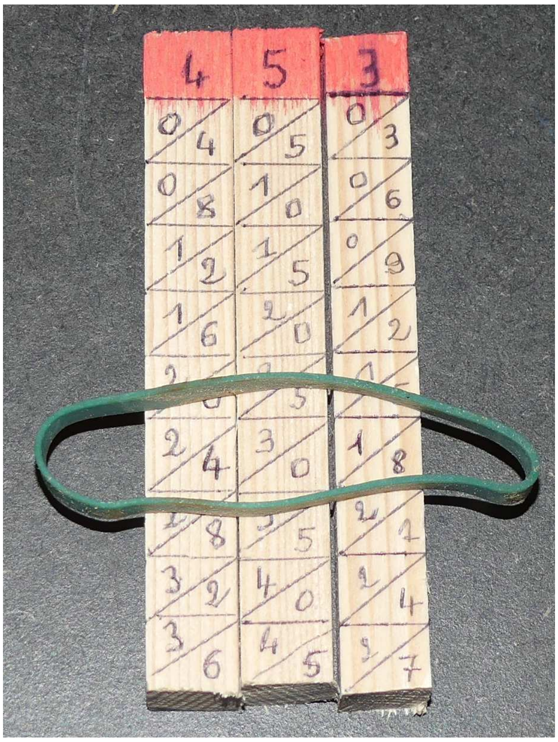


Figure 2 : *Placement des bâtons des élèves*

Dans la même optique, il peut également être intéressant de leur montrer la présentation en tableau (ou multiplication *per gelosia*), celle-ci ayant plus de sens pour certains élèves.

- Effectuer le produit 48 × 2, 6

  $$48 \times 2,6 = 48 \times 26 \text{ dixièmes}$$

  On effectue le produit 48 × 26 puis mentalement la division par 10.
- Effectuer 5 × 776 c'est-à-dire un produit avec un facteur comprenant plusieurs fois le même chiffre. Soit la table des 7 apparaît sur deux bâtons du set de l'élève soit il devra emprunter un bâton...

  > C'est l'occasion de montrer les limites du matériel et de montrer l'intérêt de savoir poser ses multiplications et du coup de maîtriser ses tables !

On peut également demander à des binômes d'effectuer les produits, l'un des élèves avec les bâtons, l'autre en posant la multiplication. La calculatrice, qui permet une auto-évaluation, permet aussi de mettre tout le monde d'accord ! En cas d'erreur dans un produit posé, la consigne était de retrouver la (ou les) erreur(s) : erreur de tables, de retenue ?

> L'expérience a été très concluante : élèves motivés, ravis de montrer à leurs parents leur set de Neper et d'en expliquer le fonctionnement.

Les élèves en difficulté étaient en situation de réussite et ont pu se réapproprier la technique

APMEP

de la multiplication posée, pour laquelle la maîtrise des tables est indispensable. Chaque élève a conservé son set de bâtons dans sa trousse, certains les avaient encore en 5e !

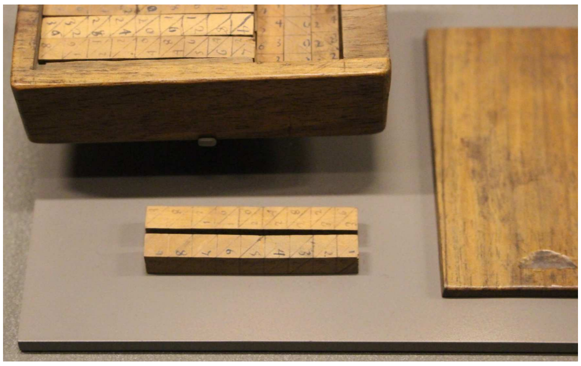


Figure 3 : *Bâtons de Néper au Musée des Arts et Métiers.*

À l'heure des EPI, un parcours avec un ou une collègue d'histoire ne peut qu'enrichir le cours de mathématiques. **Une visite à Paris au Musée des Arts et Métiers est bien sûr un plus.** Le musée met aussi en ligne un document pédagogique intitulé « Du doigt à la machine : le calcul ». Boulier chinois, pascaline, machine à calculer de Bollée, bâtons de Neper et autres machines exposées au musée y sont illustrés avec un questionnaire que les élèves peuvent compléter durant leur visite ou de retour en classe. Pour tous ceux qui ne peuvent pas emmener leurs élèves à Paris, de nombreuses vidéos permettent d'observer le matériel et d'écouter une explication.

Que cet article soit l'occasion de saluer la mémoire de Françoise Coumes, professeure des écoles avec qui nous avons pu mener ces liaisons, trop tôt disparue.

Séverine Chassagne-Lambert et Valérie Larose enseignent actuellement respectivement au collège/lycée de Sceaux (92) et au lycée de Vaison-la-Romaine (84).

Pour aller plus loin

[1] Alain Busser et Nathalie Duval. *Les instruments de calcul anciens : de l'abaque à jetons aux réglettes de Genaille*. MathemaTICE n°51.

[2] Valérie Larose. "Échanges entre CM2 et Sixièmes". In : *Bulletin de l'APMEP* 468 (2007).

[3] Caroline Poisard. "Ateliers de fabrication et d'étude d'objets mathématiques, le cas des instruments à calculer". Cinq fiches et quatre modèles sont téléchargeables, la fiche 4 concerne les bâtons de Neper. La thèse est sur Culture*MATH* : . Université de d'Aix-Marseille, 2005.

Figure 4 : *Ader Avion III, de Clément Ader, 1891. wikimedia*

Pas de probas, pas de chocolat !

Expériences aléatoires, lois discrètes et continues, approximation des unes par les autres, intervalles de confiance, fluctuations d'échantillonnage, tests statistiques, paradoxes probabilistes... Un menu riche et croquant, qui passe quand même mieux avec des friandises.

Karim Zayana

De la tartine de chocolat au paradoxe du « chat beurré »

Forrest aime le chocolat [1][9]. Philosophe et probabiliste à ses heures, il s'est rendu célèbre grâce à cette phrase culte, tube planétaire à la réflexion pénétrante : « La vie c'est comme une boîte de chocolats, on ne sait jamais sur quoi on va tomber ». Tirer au sort des chocolats est certes une activité intéressante. Mais aujourd'hui, Forrest s'occupe avec un petit pain suédois. Consciencieusement, il le nappe de sa pâte chocolatée préférée. Souriant devant la caméra, il place habilement quelques références produit (le dentifrice xxxx à la menthe ; le xxxx aux noisettes), quand soudain, c'est le drame. En plein direct. Un faux mouvement sur un geste pourtant répété cent fois dans la loge avec son téléphone portable. La tartine tombe. L'image défile sur les télévisions, semant l'effroi chez les millions de foyers rivés à ce programme familial. En léger déséquilibre, le goûter de Forrest se retourne. Une seule fois – le ralenti est formel. En effet, le chocolat, trop lourd (Forrest n'a pas lésiné), empêche la rotation de se poursuivre : pas assez d'élan. Et cette chute, inexorable. Une mère voudrait masquer les yeux de sa fille. Un père couvrir ceux de son fils. Aimantés par l'écran, ils suivent pourtant la scène, médusés, tandis que Bill jappe, flaire et salive de désespoir devant les insoutenables gros plan. Puis le choc : face contre terre.

Fracas. Silence. Coupons ! Reprenons l'expérience. Soit la probabilité p que « la tartine tombe côté chocolat », et $q = 1 - p$ celle de l'événement contraire : « la tartine tombe côté croûte ». Dans les deux cas, la tartine sera moins bonne à manger. Et endommagée, ce qui compromet l'indépendance théorique de deux expériences successives et pourrait influer sur le paramètre p, au début très proche de 1, puis de moins en moins à mesure que la pâte se détache. Mais faisons comme si de rien n'était. Chaque chute est une réalisation de Bernoulli $\mathscr{B}(p)$. Deux questions classiques émergent [3] :

> 1. après n tels crash tests, à quelle loi obéit le nombre S_n de chutes côté croûte ? Une loi binomiale de paramètres n et p, dès lors : $\mathbb{P}(S_n = k) = \binom{n}{k} p^{n-k} q^k$;
> 2. quelle loi gouverne le rang T de la première chute côté croûte ? Une loi géométrique de paramètre q, ainsi :
>
> $$\mathbb{P}(T = k) = p^{k-1} q.$$

La première question s'accompagne souvent d'un calcul classique d'espérance : $E(S_n) = np$. Fait notable, une fois traitée, la deuxième question fournit une démonstration probabiliste de la somme d'une progression géométrique. Pour cela, on considère la probabilité que la tartine tombe côté croûte au moins une fois à l'issue de $n + 1$ jets. Cette dernière vaut $1 - p^{n+1}$ en examinant l'événement contraire. Mais elle vaut aussi $q + pq + \cdots + p^n q$ en partitionnant l'étude grâce au système d'événements $T = 1$, $T = 2$, ..., $T = n + 1$. On a donc $q(1 + p + \cdots + p^n) = 1 - p^{n+1}$, d'où l'on tire, après division par $q = 1 - p$, la formule connue.

1. Et les crevettes.

Ne terminons pas sans avoir évoqué le temps moyen d'attente $E(T)$ avant d'obtenir une chute côté croûte. Il suffit de sommer :

$$E(T) = \sum_{k \geqslant 1} k\,\mathbb{P}(T = k) = q \sum_{k \geqslant 1} kp^{k-1}$$

qui vaut [2] $\frac{q}{(1-p)^2} = \frac{1}{q}$.

Refermons cette partie sur le paradoxe du « chat beurré ». C'est bien connu, Schrödi retombe toujours sur ses pattes. Forrest, décidément maladroit, renverse un pot de beurre de cacao sur le dos du chat. Il attrape l'animal pour le nettoyer. Mais Schrödi, toutes griffes dehors, miaule, s'agite, s'échappe, et saute dans le vide. Le chocolat l'attire d'un côté, ses pattes de l'autre. Tournoyant tel un cosmonaute, défiant les lois de la Physique classique, Schrödi restera suspendu en lévitation un mètre au-dessus du sol. . .

Œufs surprises, la loi du collectionneur

Charlie aussi aime le chocolat [1]. Petit garçon, on raconte qu'il a trouvé un coupon gagnant dans un délice à la guimauve. Depuis, il a grandi, fondé sa chocolaterie, mais gardé son âme d'enfant. Chaque soir, il prélève un œuf surprise en sortie de son usine et construit le petit jouet. On suppose que la collection comporte $r = 100$ modèles différents de jouets, tous distribués dans une même proportion et aléatoirement. Quel temps U (en jours) Charlie patientera-t-il afin de réunir les r pièces différentes ? En voilà une question !

On modélise le problème de la façon suivante : on considère que Charlie a déjà recueilli $k-1$ jouets distincts ($k \leqslant r$). Appelons T_k le délai nécessaire pour découvrir une nouvelle pièce (différente des $k-1$ déjà trouvées). Bien entendu, $T_1 = 1$ et $U = T_1 + T_2 + \cdots + T_r$. Comme vu dans la partie précédente, la variable aléatoire T_k suit une loi géométrique de paramètre $p_k = \frac{r-k+1}{r}$. Donc $E(T_k) = \frac{r}{r-k+1}$.

$$\text{Puis } E(U) = \sum_{k=1}^{r} \frac{r}{r-k+1} = r \sum_{k'=1}^{r} \frac{1}{k'} \approx r\ln(r).$$

Il faudra en moyenne un peu plus d'un an à Charlie pour réunir tous les jouets. . .

Fondue au chocolat, quand le discret devient continu

Cette partie est à la croisée des deux autres. Elle articule la loi binomiale à la loi gaussienne, s'applique aux statistiques inférentielles et reprend les approches déjà très fécondes proposées dans [4] et [8].

Une grande somme de variables aléatoires identiquement distribuées et indépendantes « se comporte » comme une gaussienne, voilà la tendance qu'exprime le théorème central limite. L'énoncé, dans le cas particulier d'une addition S_n de variables de Bernoulli (suisse, XVII^e^) de paramètre p, est connu sous les noms de Moivre-Laplace (tous deux français, XVIII^e^).

Visuel, le phénomène est frappant quand $p = \frac{1}{2}$ sur une planche de Galton (anglais, XIX^e^), figure [3] 1 à main levée. Une pièce en chocolat lâchée du haut du support incliné, roule dans le graphe comme à travers un réseau capillaire. À chaque étage, elle hésite entre sa gauche, codée par le chiffre 0 et sa droite, codée par le chiffre 1. Cette marche aléatoire reproduite de nombreuses fois montre une répartition en cloche d'un trésor qui s'entasse. La même expérience, en faisant cette fois couler une quantité identique de chocolat fondu à l'intérieur de la galerie engendrerait une surface lisse et bosselée, de même aire totale [4] puisqu'il y a la même quantité de chocolat.

Des simulations informatiques confortent et affinent cette première impression. Plus précisément, suivons l'évolution de $f_n = \frac{S_n}{n}$, homogène à une fréquence. Le bon sens (et la loi des grands nombres) nous la font converger vers p. La variance étant ici additive, $E(f_n^2) = \frac{\sigma_n^2}{n}$ où $\sigma_n = pq$. La loi normale cible a donc pour densité de probabilité :

$$\frac{\exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{x-p}{\sigma_n}\right)^2\right)}{\sqrt{2\pi}\sigma_n}.$$

Pour contrôler le rapprochement des lois, il faut d'abord associer une densité de probabilité à la variable discrète f_n, en interprétant $\mathbb{P}\left(\frac{S_n}{n} = \frac{k}{n}\right)$ comme l'intégrale d'une constante sur l'étendue $\left[\frac{k}{n}; \frac{k+1}{n}\right]$, ou, mieux (correction de continuité), sur $\left[\frac{k}{n} - \frac{1}{2n}; \frac{k}{n} + \frac{1}{2n}\right]$. C'est assimiler la densité de probabilité de f_n à l'application en escalier valant $n\binom{n}{k}p^{n-k}q^k$ (le n en facteur intègre l'étroitesse de la subdivision, la somme discrète totale valant 1) entre $\frac{k}{n} - \frac{1}{2n}$ et $\frac{k}{n} + \frac{1}{2n}$. Le script Python en découle.

À la commande `VoirCentralLimite(0.3,100)`, l'ordinateur répond, très convaincant, la figure 2. Maintenant résolus à substituer une loi par l'autre nous affirmons avec raison que, pour les valeurs de n « assez grandes », la probabilité que f_n avoisine p à $1,96\frac{\sigma_n}{\sqrt{n}}$ près frise les 95 %.

2. Multiplier le développement de $\frac{1}{1-p}$ vu plus haut par lui-même, ou le dériver terme à terme pour obtenir la formule désirée.
3. D'autres modèles ont l'apparence d'un billard.
4. On considère ici que la pièce et la nappe ont même épaisseur.

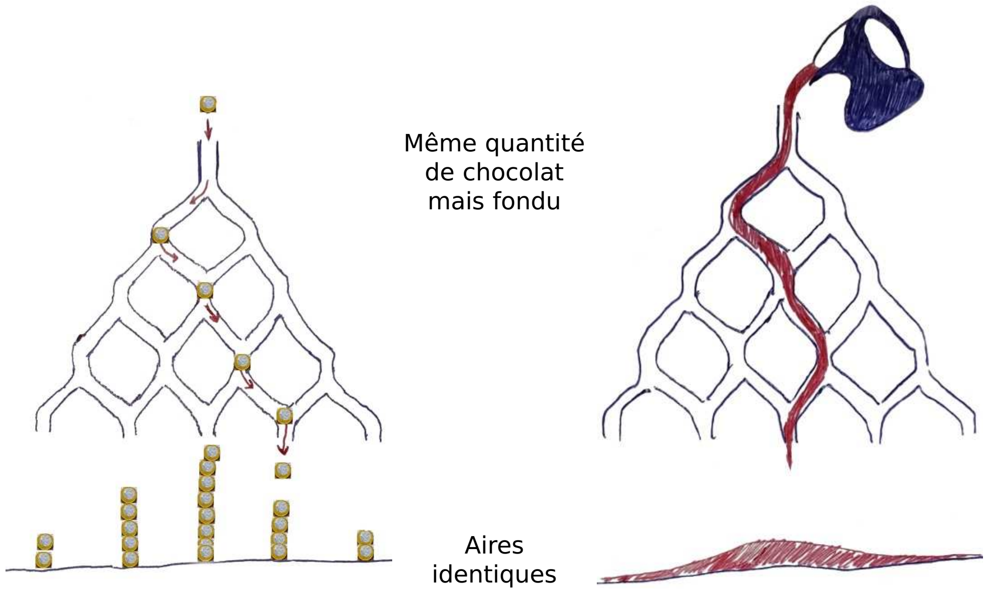


Figure 1 : *Illustration planche de Galton*

Dès lors, à quelques rares exceptions près :

$$|f_n - p| \leqslant 1,96\frac{\sigma_n}{\sqrt{n}},$$

domaine plan dont le contour satisfait l'équation de l'ellipse « d'incertitude »

$$(f_n - p)^2 = 1,96\frac{p(1-p)}{n}.$$

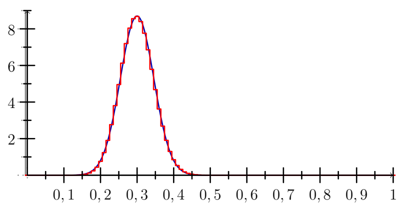


Figure 2 : *Densités comparées de f_n et d'une gaussienne cible.*

Retrouvons cela par simulation. Fixons n. Pour plusieurs valeurs de p, demandons chaque fois plusieurs valeurs de fréquence (nécessitant elles-mêmes, en filigrane, plusieurs tirages comme autant de pas d'une marche aléatoire). Puis lançons l'instruction de tracé, `EllipseFluctuation(n=30,nTirages=100,pas=0.05)`. Le nuage des points $(p\,;f_n)$ est essentiellement bordé par une ellipse, frontière qu'il traverse à peine, figure 3, comme Tchernobyl !

Pour p (respectivement f_n) donné, l'excursion de la fréquence f_n (resp. de la proportion p) est matérialisée par le segment vertical (resp. horizontal), dit intervalle de fluctuation (resp. de confiance). Aux coins, près desquels les tangentes à l'ellipse peuvent être parallèles aux axes, une faible variation de p peut induire une forte variation du domaine de f_n, et vice-versa. La relation de liaison n'est donc pas robuste, cela explique qu'on n'exploite pas, en pratique, les extrémités. Ajoutons qu'à f_n fixé, l'intervalle de confiance, ayant pour rayon $1,96\frac{\sigma_n}{\sqrt{n}} = 1,96\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}$, n'est pas connu. Pour déjouer le mystère, on remplace empiriquement le produit $p(1-p)$ par le produit $f_n(1-f_n)$, qui l'estime, ou – c'est plus prudent – on le majore par $\frac{1}{4}$. Comme $\frac{1{,}96}{\sqrt{4}} \leqslant 1$ on s'accommode volontiers de l'intervalle de confiance $\left[f_n - \frac{1}{\sqrt{n}}\,; f_n + \frac{1}{\sqrt{n}}\right]$.

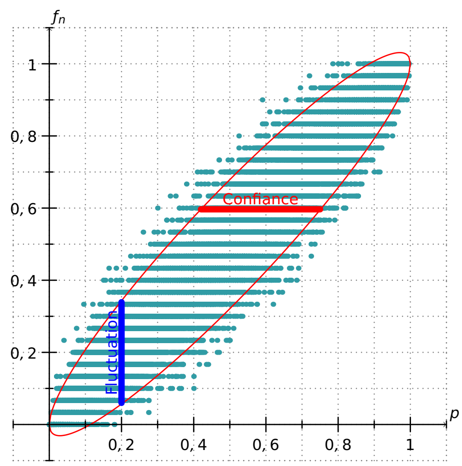


Figure 3 : *Ellipse, confiance, fluctuation*

Tablettes de chocolat : ce qu'en disent les lois

Le Baccalauréat aime également le chocolat (voir [5], [6], [7]). Un scénario bien rodé : le fabricant Choko ne sait pas comment régler ses machines à tablettes de 100 grammes ? Viens-lui en aide ! Le distributeur Aupré peut-il se fier à lui ? Rassure-le ! Tout est affaire de loi(s)... Et en la matière, le décret n°78-166 du 31 janvier 1978 relatif au contrôle métrologique des préemballages fixe des règles strictes :

1. une tablette de 100 grammes (nets, hors conditionnement : sans le papier d'aluminium donc) peut s'écarter légèrement de ce poids nominal. Il est reconnu que le poids[5] de 100 g affiché sur l'emballage n'est qu'une « estimation », souvent symbolisée par la lettre « e » (figure 4) ;

Figure 4 : *Logo e*

2. est tolérée une « erreur maximale » de 4,5 g, dans un sens précisé ci-après ;
3. dans un lot quelconque, la proportion de tablettes présentant une « erreur en moins » (appelée aussi « manquant ») inférieure à l'erreur maximale tolérée de 4,5 g doit être supérieure à 97,5 %. Ainsi, au moins 97,5 % des tablettes du lot pèsent au moins 95,5 g ;
4. aucune tablette défectueuse ne doit être super-défectueuse, c'est-à-dire présenter une erreur au moins double de l'erreur maximale : 9 g, sous peine de se voir retirer le label « e ». Ainsi, sous couleur d'étiquetage « e », aucune tablette ne pèse moins de 91 g ;
5. la moyenne des masses des tablettes du lot ne doit pas être inférieure à la quantité nominale annoncée : 100 g.

Mettons-nous à la place de l'industriel. Il ajustera sa chaîne de production, aux issues supposées gaussiennes, pour qu'en sortie les masses des tablettes répondent au cahier des charges : $m = 100$ et $\sigma \leqslant \frac{4,5}{2} = 2,25$[6]. Les fabricants « low-cost » n'ont pas des machines précises, leur production est irrégulière en qualité (écart-type élevé).
Si $\sigma > 2,25$, ils sont contraints de fixer

$$m \geqslant 100 - 4,5 + 2\sigma$$

s'ils veulent se conformer à la législation française, selon les préconisations de la DGCCRF[2].

Mettons-nous à la place du commerçant qui a passé commande. Il réceptionne un lot de l'industriel. En extrait un échantillon de taille n. On suppose que l'échantillon est assez petit et le lot assez grand pour que les tirages, pourtant sans remise, soit considérés comme non exhaustifs. On calcule la fréquence f_n de tablettes conformes, on la situe par rapport à l'intervalle de fluctuation attendu au seuil de 95 %. C'est la sempiternelle question : $f_n \in \left[p - 1,96\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}; p + 1,96\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}\right]$? avec $p = 97,5\,\%$.

Mettons-nous à la place du candidat. Il le remarquera peut-être : le sujet aura souvent choisi pour l'industriel un intervalle de mise sur le marché qui est centré (et non monolatéral). Il le notera également : l'énoncé ne dit jamais ce qu'il advient des tablettes test – en particulier qui les mange. Une fois l'épreuve terminée, gageons qu'il sortira du sac une barre de céréales.

L'auteur tient à remercier Edwige Croix et François Bouyer pour leur relecture attentive.

Karim Zayana est inspecteur général et professeur invité à l'Institut Mines-Télécom. Cet article fait suite à plusieurs échanges avec les équipes des professeurs des établissements d'Ajaccio, de Corté, de Reims, avril-octobre 2017.

Références

[1] Tim Burton. *Charlie et la Chocolaterie*. 2005.

[2] DGCCRF. *Métrologie et transaction commerciale*. . 4 fév. 2018.

[3] Richard Isaac. *Une initiation aux probabilités*. Trad. par Roger Mansuy. Paris : Vuibert, Springer, 2005.

[4] Daniel Perrin. "Remarques sur l'enseignement des probabilités et de la statistique au lycée". In : *Statistique et Enseignement* 6.1 (2015). .

[5] *Série L, Amérique du nord*. . 2010.

[6] *Série S, Amérique du nord*. . 2015.

[7] *Série S, Pondichéry*. . 2017.

[8] Charles Torossian. *Du jeu de Pile ou Face à la formule de Black and Scholes*. . 2013.

[9] Robert Zemeckis. *Forrest Gump*. 1994.

5. La masse, en toute rigueur.

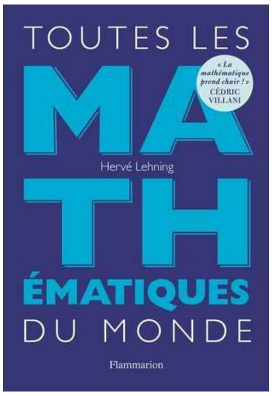
6. 95 % des réalisations d'une variable aléatoire normale sont concentrées sur $[m - 2\sigma; m + 2\sigma]$, et 97,7 % sur $[m - 2\sigma; +\infty[$ (où l'on a arrondi 1,96 en 2 dans les intervalles, centré et unilatéral).

MES CHERS ÉLÈVES, JE VAIS VOUS PROPOSER QUELQUES CASES DE BD, VOUS DEVREZ EN CALCULER L'AIRE. VOILÀ LE MATÉRIEL.
VOUS POUVEZ RENTRER DANS LES CASES OU RESTER À LA MARGE
ET SI VOUS ÊTES DANS LES CASES, SI VOUS POUVIEZ AUSSI ÊTRE UN PEU RIGOLOS...
ÇA FAIT a UNITÉS DE LONGUEUR.
ET b UNITÉS DE LARGEUR
ON PEUT METTRE DU CARRELAGE DANS TOUTE LA CASE. ENSUITE, ON COMPTERA LES CARREAUX
C'EST LONG: IL Y EN A AU MOINS POUR UNE HEURE DE COLLE
ÇA FAIT b LIGNES DE a CARREAUX, SOIT a+a+a+....+a, SOIT b×a CARREAUX
C'EST BIEN, TOTO. ON CONTINUE ...
MON MÈTRE EST TROP COURT. a UNITÉS POUR MOI.
k UNITÉS DE LARGEUR
J'EN AI ASSEZ. ARRÊTONS LE CARRELAGE!
k LIGNES DE a CARREAUX, ÇA FAIT k×a CARREAUX TU N'AS PAS ENTENDU
ET POUR MOI, b UNITÉS. DONC a+b EN TOUT
ET DONC ICI, ÇA FAT k×b CARREAUX
OUI, EN TOUT, k×a + k×b CARREAUX
ÇA VA BEAUCOUP PLUS VITE! FINIES LES HEURE DE COLLE!
DONC, DEUX MANIÈRES DE COMPTER LA MÊME AIRE : k×(a+b) = k×a + k×b


JE MESURE c UNITÉS POUR LA LARGEUR DE CES CASES
a UNITÉS POUR MOI EN LONGUEUR.
JE PRENDS LE RELAIS : b UNITÉS POUR MOI
EN TOUT, UNE LONGUEUR DE (a + b)
BON, SI J'AI BIEN COMPRIS, ON AJOUTE LES AIRES DES 4 RECTANGLES. C'EST FACILE !
OUI, ICI, ON A ac, MAIS IL EN FAUT ENCORE
MÊME SI CETTE CASE FAIT bc, ON L'AJOUTE AUSSI
ON FAIT LES TOTAUX :
(a+b) × (c+d) = a×c + b×c + a×d + b×d
d UNITÉS POUR LES SUIVANTES
DE MÊME, ON AJOUTE a×d
ET b×d.
DU BAS JUSQU'EN HAUT, IL Y A c UNITÉS
AÏE, MON MÈTRE NE S'ENROULE PLUS. IL EST COINCÉ À a UNITÉS !
ANNA, TU NE MANQUES PAS D'AIRE. JE TE REPRENDS b UNITÉS !
BON, SI JE FAIS LE BILAN,
(a-b) × (c-d) = a×c - b×c - a×d + b×d
ATTENTION, IL Y A JUSTE CETTE CASE À MESURER !
ANNA ET CLAIRE ONT MESURÉ PLUS QU'IL N'EN FAUT
ON VA DEVOIR RÉFLÉCHIR !
C'ÉTAIT TROP BEAU !
DONC ON DOIT ENLEVER TOUTE CETTE BANDE c×b
TOUTE LA BANDE ?
OUI
CLAIRE, TU AS COMPTÉ d UNITÉS EN TROP !
ET PUIS TOUTE CETTE BANDE a×d.
T'ES SÛRE ?
NON, ON A ENLEVÉ 2 FOIS CETTE CASE DE b×d !
IL FAUT LA RAJOUTER
BON, LES ENFANTS, ON A ASSEZ PRIS L'AIRE, ON RENTRE EN COURS

Matériaux pour une documentation

Toutes les mathématiques du monde. Flammarion, 2017
De Hervé Lehning



447 pages en 17 x 24. Prix : 25 €

ISBN : 978-2-0813-5445-6

Le titre peut faire sursauter. « Toutes les mathématiques du monde » ? Vraiment ? Certes l'ouvrage est assez volumineux, mais bien évidemment il ne s'agit pas d'une encyclopédie complète de mathématiques puisque, comme le dit l'auteur, on reconnaît symboliquement à Poincaré le fait d'être le dernier homme à connaître l'ensemble des mathématiques, tant leur extension et leur diversité sont devenues considérables.

> Il s'agit là d'une large visite guidée d'une très grande richesse dans le temps et l'espace du monde mathématique.

Pour ce faire, Hervé Lehning raconte des histoires, incarnées par les nombreux mathématiciens, les personnages, les cultures, les époques, autant d'occasions qui ont permis la construction des concepts mathématiques. Au travers de nombreux contextes historiques, variés, avec une part importante et très intéressante des mathématiques dans la société contemporaine, on mesure à quel point les mathématiques sont le fruit d'interrogations, de rencontres, de curiosités, de nécessités, de problèmes concrets ou idéologiques, mais aussi de blocages, d'incompréhensions, d'erreurs, de piétinements.

Le livre contient quatre parties :

> I Les origines
> II La naissance de l'abstraction
> III Au cœur des mathématiques
> IV Des mathématiques partout ?

On retrouve évidemment les éléments les plus célèbres comme le papyrus Rhind, Ératosthène, la quête des nombres premiers, le zéro et la construction des entiers par Péano, Euler, le théorème de Gödel, les problèmes de Hilbert, etc., mais on découvre aussi des éléments plus rarement évoqués comme l'organisation biologiquement pertinente de la société aborigène pour éviter les consanguinités, le duel entre Tartaglia et Del Fiore à travers des défis mathématiques, ou la flèche des ponts himalayens et des lignes à haute tension par exemple.

Si la première partie suit à peu près un ordre chronologique classique, dans les trois dernières, chaque chapitre est consacré à un thème, souvent posé comme une question ou un problème rencontré : « Le vertige de l'impossible », « Quand l'infini s'invite dans les calculs », « Les défis de l'informatique », « Dompter le hasard et le chaos », « Les mathématiciens sont-ils tous platoniciens ? », « Le vrai, le beau, le bien et le mal chez les mathéma-

ticiens », « Les erreurs : bêtises ou clefs du progrès ? », « Peut-on vraiment évaluer l'espérance de vie d'un nourrisson ? », « Les mathématiques financières sont-elles criminelles ? » pour ne citer que quelques exemples attestant de l'imbrication des mathématiques dans les sciences, la philosophie, la vie sociale. . .
Cette diversité, ainsi que les nombreuses références aux problématiques contemporaines démontrent la vivacité, la spécificité, et l'évolution permanente de cette discipline.

À qui s'adresse ce livre ?

> La vulgarisation scientifique en général, et mathématique en particulier, est un exercice particulièrement aigu, nécessitant de faire des choix sur les renoncements que l'on va concéder, sur le style à adopter, sur le niveau des connaissances et les compétences des lecteurs visés.

Dans cet ouvrage, la volonté de l'auteur de balayer un très large contenu et un grand éventail de questions mathématiques (d'où le titre du livre), le tout en 450 pages, rajoute une contrainte forte. Enfin, écrire un livre sur les mathématiques sans donner une place importante au raisonnement et aux démonstrations eût été évidemment impensable.
De tout cela, il en ressort un style souvent très dense et ramassé. On devine l'effort que l'auteur a fourni pour chercher à synthétiser en un minimum de phrases, en particulier les démonstrations : il en est parfois donné simplement l'idée principale ; lorsqu'elle est complète, elle manque singulièrement d'explicitations pour qu'un lecteur non familier du langage et des objets mathématiques puisse suivre facilement le raisonnement.
On observe également une assez grande hétérogénéité du niveau du discours adopté selon les chapitres. Il peut être quelquefois élémentaire avec un souci de définir le vocabulaire employé, ou au contraire dans un langage mathématique utilisé entre pairs. Le chapitre « La délicate définition de la notion de fonction » en est un exemple. C'est un choix compréhensible mais qui peut dérouter.

L'auteur le concède d'ailleurs dans son introduction :
« Gare au retournement de neurones ! Il faudra ponctuellement vous accrocher pour percevoir toute la beauté du monde mathématique. »
Mais, concernant les calculs, il rassure ensuite :
« Cependant, comprendre toutes les subtilités des équations n'est pas nécessaire pour saisir le sens des concepts sous-jacents. Le texte est écrit pour rester compréhensible si on les prend comme de pures illustrations ». On peut regretter quand même que l'écriture n'ait pas cherché à être systématiquement pédagogique.

> Globalement, le livre s'adresse aux lecteurs ayant déjà des connaissances en mathématiques, disons celles d'un élève de filière scientifique assez dégourdi, habitué aux formulations et au langage mathématique usuels.
> Quant au professeur de mathématiques, il trouvera dans cet ouvrage une mine d'exemples pour contextualiser avec grand profit les mathématiques qu'il enseigne.

À la fin du livre figurent une bibliographie très riche et un index complet et bien utile.

Pour tous les lecteurs, l'ouvrage fait percevoir à quel point les mathématiques sont vivantes, et s'inscrivent totalement dans l'histoire de l'humanité et celle des idées. Il permet aussi aux citoyens curieux, de comprendre ce qu'est « La Mathématique », son essence, sa nature, sa vocation, sa multiplicité, faisant ainsi œuvre d'utilité publique pour la culture générale.

Rémy Coste

> L'équipe éditoriale recherche des collègues volontaires pour écrire des recensions d'ouvrages envoyés par les éditeurs. Pour plus d'informations à ce sujet, contactez Valérie Larose (vali.larose@gmail.com).

Association des Professeurs de Mathématiques de l'Enseignement Public

Abonnement à « Au fil des maths - Le bulletin de l'APMEP » ou adhésion à l'APMEP

Coordonnées

Nom (établissement ou personne) : ....

Adresse : ....

Code Postal : .... *Ville :* .... *Pays :* ....

Téléphone : .... *Adresse courriel :* ....

Numéro de TVA intracommunautaire : ....

Adresse de livraison : ....

....

Adresse de facturation : ....

....

Catégorie professionnelle : ☐ étudiant ☐ stagiaire ☐ 1^er^ degré ☐ 2^nd^ degré
☐ service partiel ☐ contractuel ☐ Enseignant dans le supérieur, inspecteur

ou type d'établissement : ....

Abonnement à « Au fil des maths - Le bulletin de l'APMEP »

pour les établissements et les personnes qui n'adhérent pas à l'APMEP. **L'abonnement seul ne donne ni la qualité d'adhérent, ni l'accès à la revue numérique** et ne donne pas lieu à une réduction fiscale. Cependant, les abonnés non adhérents bénéficient du tarif *adhérent/abonné* pour l'achat de brochures de l'APMEP (réduction de 30 % sur le prix public). L'abonnement peut aussi être souscrit sur ***www.apmep.fr***

☐ **60 € TTC** pour la France, Andorre, Monaco et les établissements européens qui n'ont pas de numéro de TVA intracommunautaire,

☐ **65,15 € TTC** pour les DOM-TOM,

☐ **63,87 € TTC** pour les pays hors Union Européenne et les établissements européens ayant un numéro de TVA intracommunautaire.

Première adhésion à l'APMEP (pour un renouvellement d'adhésion aller sur www.apmep.fr)

Pour découvrir l'association, ses publications, ses activités, ses Journées Nationales... à un prix d'autant pus avantageux que l'adhésion permet d'obtenir une réduction fiscale du tiers de son montant. Les adhérents de l'APMEP reçoivent gratuitement «Au fil des maths - Le bulletin de l'APMEP».
Une première adhésion ne peut être souscrite qu'une seule fois à l'aide de ce formulaire ou sur www.apmep.fr

☐ **étudiant 10 €** ☐ **autres catégories professionnelles 30 €**

Avec 5,50 € de frais de port l'APMEP offre deux brochures de bienvenue (dans la limite des stocks disponibles) à choisir uniquement dans la liste disponible sur ***https://www.apmep.fr/IMG/pdf/Commande_brochures_cadeau_3.pdf***

Règlement : à l'ordre de l'APMEP (Crédit Mutuel Enseignant - IBAN : FR76 1027 8065 0000 0206 2000 151)

☐ par chèque ☐ par mandat administratif ☐ par virement postal

Date .... Signature .... Cachet de l'établissement

Bulletin d'abonnement et réglement à envoyer à : APMEP 26 rue Duméril 75013 PARIS

SOMMAIRE

CultureMATH

APMEP

www.apmep.fr