Bienaymé et l'extinction des familles

Sandrine Dallaporta

Université de Poitiers

3 juin 2026

Plan

Irénée Jules Bienaymé (1796–1878)

Archives de l'Académie des Sciences de Paris

Irénée Jules Bienaymé (1796–1878)

Archives de l'Académie des Sciences de Paris

Sa tombe au cimetière du Montparnasse

Wikimedia Commons, CC BY-SA

Le 19^{e}, un siècle mouvementé en France

- 1789 : Révolution française
- 1799–1814 (+1815) : règne de Napoléon 1er
- 1814–1815 puis 1815–1848 : Restauration puis Monarchie de Juillet
- 1848–1852 : II^{e} République
- 1852–1870 : règne de Napoléon III
- après 1870 : III^{e} République (Commune de Paris en 1871).

Impact sur la vie d'Irénée Jules Bienaymé

- Admission à l'école Polytechnique en 1815 **à 19 ans**

Impact sur la vie d'Irénée Jules Bienaymé

- Admission à l'école Polytechnique en 1815 **à 19 ans**

- carrière dans la fonction publique, au sein de l'Inspection Générale des Finances
  $\rightsquigarrow$ Inspecteur Général dès 1836 **à 40 ans**

Impact sur la vie d'Irénée Jules Bienaymé

- Admission à l'école Polytechnique en 1815 **à 19 ans**

- carrière dans la fonction publique, au sein de l'Inspection Générale des Finances
  $\rightsquigarrow$ Inspecteur Général dès 1836 **à 40 ans**

- Retraite à sa demande en 1852 **à 56 ans**
  $\rightsquigarrow$ membre libre de l'Académie des Sciences
  $\rightsquigarrow$ rapporteur du prix Montyon en statistique
  $\rightsquigarrow$ président de la Société Mathématique de France en 1875

Impact sur la vie d'Irénée Jules Bienaymé

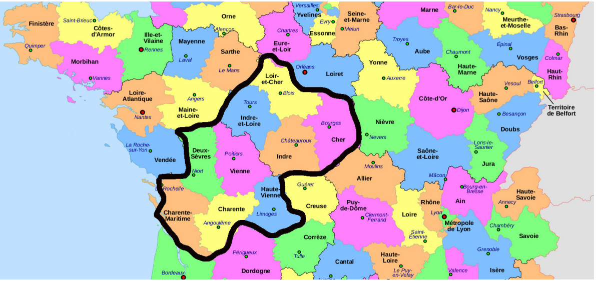
- Admission à l'école Polytechnique en 1815 **à 19 ans**
  Licenciement des élèves de l'école Polytechnique en 1816
- carrière dans la fonction publique, au sein de l'Inspection Générale des Finances (1816–1852)
  $\rightsquigarrow$ Inspecteur Général dès 1836 **à 40 ans**
- Retraite à sa demande en 1852 **à 56 ans**
  $\rightsquigarrow$ membre libre de l'Académie des Sciences
  $\rightsquigarrow$ rapporteur du prix Montyon en statistique
  $\rightsquigarrow$ président de la Société Mathématique de France en 1875

Impact sur la vie d'Irénée Jules Bienaymé

- Admission à l'école Polytechnique en 1815 **à 19 ans**
  Licenciement des élèves de l'école Polytechnique en 1816
- carrière dans la fonction publique, au sein de l'Inspection Générale des Finances (1816–1852)
  $\rightsquigarrow$ Inspecteur Général dès 1836 **à 40 ans**
  Mise à la retraite forcée en 1848 (à 52 ans) avec rétablissement en 1850
- Retraite à sa demande en 1852 **à 56 ans**
  $\rightsquigarrow$ membre libre de l'Académie des Sciences
  $\rightsquigarrow$ rapporteur du prix Montyon en statistique
  $\rightsquigarrow$ président de la Société Mathématique de France en 1875

Être inspecteur général des finances au 19e

- responsabilité d'une « division » (12 au total en France)
- tournée annuelle d'avril à novembre sur le terrain
- environ 1 mois par département pour vérifier tous les services comptables et administratifs publics



9e division vers 1845
Wikimedia Commons – CC-BY-SA

Être inspecteur général des finances au 19e

- responsabilité d'une « division » (12 au total en France)
- tournée annuelle d'avril à novembre sur le terrain
- environ 1 mois par département pour vérifier tous les services comptables et administratifs publics
- production de rapports

Connaissance profonde du terrain.

Contexte : demande croissante de l'État d'avoir des données pour s'organiser (santé publique, assurances, retraites, transports...)

Bienaymé fait partie des principaux rédacteurs de la loi du 18 juin 1850 portant sur la création de la Caisse des retraites pour la vieillesse.

Œuvre scientifique

- profonde admiration de la vision probabiliste de Laplace, notamment du traité « Théorie des probabilités » (1812)

THÉORIE

ANALYTIQUE

DES PROBABILITÉS;

PAR M. LE MARQUIS DE LAPLACE,

Pair de France; Grand Officier de la Légion d'honneur; l'un des quarante de l'Académie française; de l'Académie des Sciences; membre du Bureau des Longitudes de France; des Sociétés royales de Londres et de Göttingue; des Académies des Sciences de Russie, de Danemark, de Suède, de Prusse, des Pays-Bas, d'Italie, etc.

- poste au sein de l'Inspection Générale des Finances :
  - ⇝ véritable souci des applications (démographie, statistiques sociales, assurances...)
  - ⇝ temps de recherche limité

- 23 articles, beaucoup sont publiés dans journal de la Société Philomatique de Paris : pas un journal spécifique aux mathématiques.
- aucun livre.
- correspondance scientifique avec Quetelet, Cournot, Tchebychev mais pas d'encadrement d'étudiant·e en recherche (doctorat).
- pas de poste académique.
- sévères problèmes de santé l'empêchant en particulier d'écrire.

- 23 articles, beaucoup sont publiés dans journal de la Société Philomatique de Paris : pas un journal spécifique aux mathématiques.
- aucun livre.
- correspondance scientifique avec Quetelet, Cournot, Tchebychev mais pas d'encadrement d'étudiant·e en recherche (doctorat).
- pas de poste académique.
- sévères problèmes de santé l'empêchant en particulier d'écrire.

Querelle scientifique avec Poisson et Cauchy, notamment sur le degré d'universalité de la loi des grands nombres

- 23 articles, beaucoup sont publiés dans journal de la Société Philomatique de Paris : pas un journal spécifique aux mathématiques.
- aucun livre.
- correspondance scientifique avec Quetelet, Cournot, Tchebychev mais pas d'encadrement d'étudiant·e en recherche (doctorat).
- pas de poste académique.
- sévères problèmes de santé l'empêchant en particulier d'écrire.

Querelle scientifique avec Poisson et Cauchy, notamment sur le degré d'universalité de la loi des grands nombres

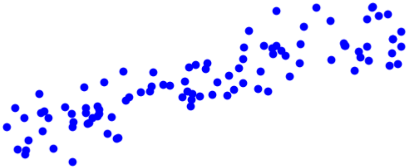
$\rightsquigarrow$ Son œuvre scientifique est largement méconnue et une partie tombe très rapidement dans l'oubli.

Quelques exemples de contributions de Bienaymé

- Méthode des moindres carrés – Régression linéaire
  Observations : $Y_1, \ldots, Y_n$
  On connaît $X_1, \ldots, X_n$ et on veut « expliquer » les Y_i par

$$\text{pour } i = 1 \ldots n,\ \ Y_i = aX_i + b + \varepsilon_i,$$

où a et b sont inconnus et les ε_i sont des erreurs qu'on ne connaît pas mais sur lesquelles on fait des hypothèses.

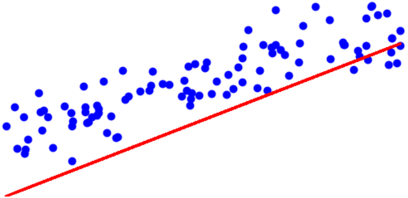


Quelques exemples de contributions de Bienaymé

- Méthode des moindres carrés – Régression linéaire
  Observations : $Y_1, \ldots, Y_n$
  On connaît $X_1, \ldots, X_n$ et on veut « expliquer » les Y_i par

  $$\text{pour } i = 1 \ldots n, \;\; Y_i = aX_i + b + \varepsilon_i,$$

  où a et b sont inconnus et les ε_i sont des erreurs qu'on ne connaît pas mais sur lesquelles on fait des hypothèses.

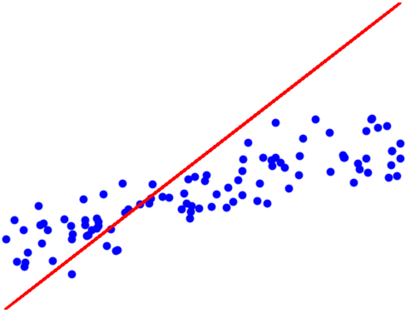


Quelques exemples de contributions de Bienaymé

- Méthode des moindres carrés – Régression linéaire
  Observations : $Y_1, \ldots, Y_n$
  On connaît $X_1, \ldots, X_n$ et on veut « expliquer » les Y_i par

$$\text{pour } i = 1 \ldots n,\ \ Y_i = aX_i + b + \varepsilon_i,$$

où a et b sont inconnus et les ε_i sont des erreurs qu'on ne connaît pas mais sur lesquelles on fait des hypothèses.

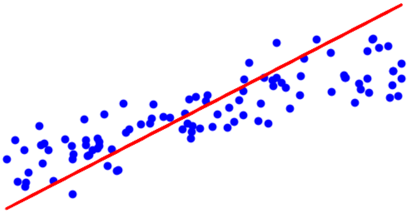


Quelques exemples de contributions de Bienaymé

- Méthode des moindres carrés – Régression linéaire
  Observations : $Y_1, \dots, Y_n$
  On connaît $X_1, \dots, X_n$ et on veut « expliquer » les Y_i par

  $$\text{pour } i = 1 \dots n, \;\; Y_i = aX_i + b + \varepsilon_i,$$

  où a et b sont inconnus et les ε_i sont des erreurs qu'on ne connaît pas mais sur lesquelles on fait des hypothèses.

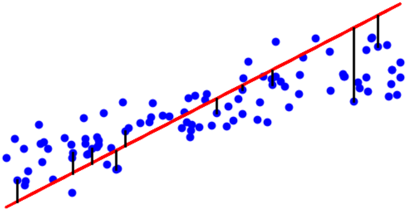


Quelques exemples de contributions de Bienaymé

- Méthode des moindres carrés – Régression linéaire
  Observations : $Y_1, \ldots, Y_n$
  On connaît $X_1, \ldots, X_n$ et on veut « expliquer » les Y_i par

$$\text{pour } i = 1 \ldots n, \;\; Y_i = aX_i + b + \varepsilon_i,$$

où a et b sont inconnus et les ε_i sont des erreurs qu'on ne connaît pas mais sur lesquelles on fait des hypothèses.



Minimiser en a et b

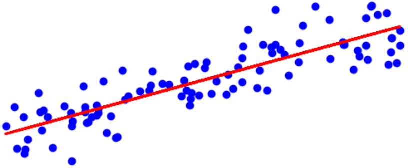
$$\sum_{i=1}^{n} (Y_i - aX_i - b)^2.$$

Quelques exemples de contributions de Bienaymé

- Méthode des moindres carrés – Régression linéaire
  Observations : $Y_1, \ldots, Y_n$
  On connaît $X_1, \ldots, X_n$ et on veut « expliquer » les Y_i par

$$\text{pour } i = 1 \ldots n, \ Y_i = aX_i + b + \varepsilon_i,$$

où a et b sont inconnus et les ε_i sont des erreurs qu'on ne connaît pas mais sur lesquelles on fait des hypothèses.



Minimiser en a et b

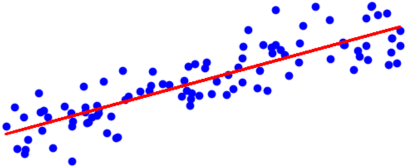
$$\sum_{i=1}^{n} (Y_i - aX_i - b)^2.$$

Quelques exemples de contributions de Bienaymé

- Méthode des moindres carrés – Régression linéaire
  Observations : $Y_1, \ldots, Y_n$
  On connaît $X_1, \ldots, X_n$ et on veut « expliquer » les Y_i par

$$\text{pour } i = 1 \ldots n, \ Y_i = aX_i + b + \varepsilon_i,$$

où a et b sont inconnus et les ε_i sont des erreurs qu'on ne connaît pas mais sur lesquelles on fait des hypothèses.



Minimiser en a et b

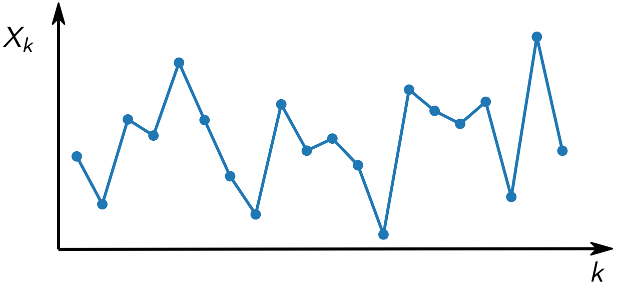
$$\sum_{i=1}^{n} (Y_i - aX_i - b)^2.$$

Bienaymé : cas multivarié

- Inégalité de Bienaymé-Tchebychev
  $X_1, \dots, X_n$ sont des variables aléatoires indépendantes d'espérance m et de variance σ^2.
  On note $\bar{X}_n = \frac{1}{n}(X_1 + \cdots + X_n)$.

$$\text{Alors, pour tout } t > 0,\ \mathbb{P}(|\bar{X}_n - m| > t) \leqslant \frac{\sigma^2}{nt^2}.$$

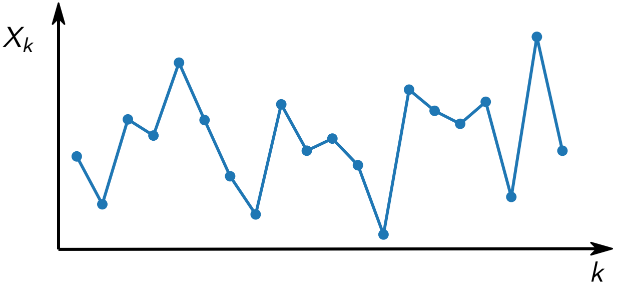
- Points tournants
  $X_1, \dots, X_n$ des variables aléatoires indépendantes



- Inégalité de Bienaymé-Tchebychev
  $X_1, \ldots, X_n$ sont des variables aléatoires indépendantes d'espérance m et de variance σ^2.
  On note $\bar{X}_n = \frac{1}{n}(X_1 + \cdots + X_n)$.

$$\text{Alors, pour tout } t > 0,\ \mathbb{P}(|\bar{X}_n - m| > t) \leqslant \frac{\sigma^2}{nt^2}.$$

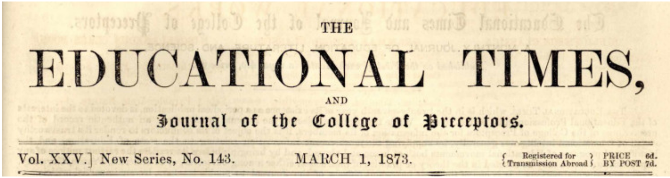
- Points tournants
  $X_1, \ldots, X_n$ des variables aléatoires indépendantes



I. J. Bienaymé, Statistical theory anticipated, Heyde et Seneta

Plan

Origine supposée de ce problème jusqu'en 1970 : une question de Sir Francis Galton en 1873...

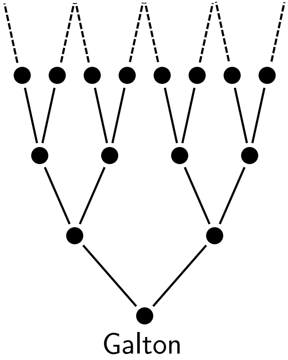


THE
EDUCATIONAL TIMES,
AND
Journal of the College of Preceptors.

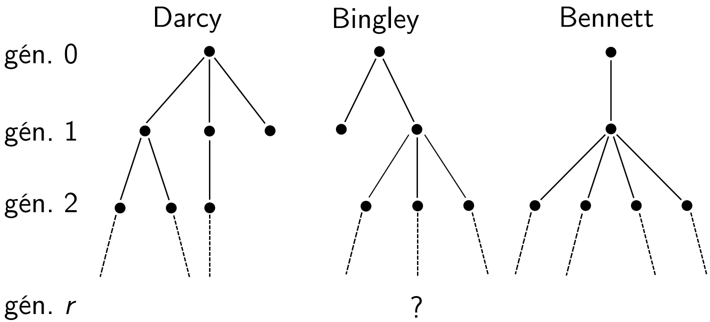
Vol. XXV.] New Series, No. 143. MARCH 1, 1873. { Registered for Transmission Abroad } PRICE 6d. BY POST 7d.

Une grande nation, de laquelle nous ne considérons que les hommes adultes, au nombre de N, et qui portent chacun un nom de famille différent, colonise une région. La loi de la population est telle qu'à chaque génération, a_0 pour cent des hommes adultes n'ont aucun garçon qui atteint l'âge adulte ; a_1 ont un seul tel garçon ; a_2 en ont deux ; et ainsi de suite jusqu'à a_5 qui en ont cinq. Trouver (1) ***quelle proportion des noms de famille va s'éteindre après r générations*** *; et (2) dans combien de cas le même nom de famille sera porté par m personnes.*

Arbre généalogique



Arbre généalogique descendant

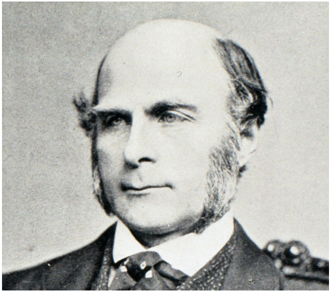


Question résolue partiellement par le Révérend Henry Watson

Écriture d'un article commun paru en 1874 : *On the probability of the extinction of families*.

- introduction du modèle appelé processus de Galton-Watson
- obtention d'un résultat pas tout à fait correct : ils concluent que tous les noms de familles s'éteignent avec probabilité 1.

Steffensen apporte une démonstration correcte en 1930.



Vers 1970, à l'université de Sydney

Lancaster signale à Heyde et Seneta l'existence d'un article de Bienaymé intitulé

De la loi de multiplication et de la durée des familles

publié dans le journal de la Société Philomatique de Paris en 1845.

Vers 1970, à l'université de Sydney

Lancaster signale à Heyde et Seneta l'existence d'un article de Bienaymé intitulé

De la loi de multiplication et de la durée des familles

publié dans le journal de la Société Philomatique de Paris en 1845.

Motivation similaire à celle de Galton et Watson :
On s'est beaucoup occupé de la multiplication possible du nombre des hommes ; et récemment diverses observations très curieuses ont été publiées sur la fatalité qui s'attacherait aux corps de noblesse, de bourgeoisie, aux familles des hommes illustres, etc. ; fatalité qui, dit-on, ferait disparaitre inévitablement ce qu'on a nommé des familles fermées.

Vers 1970, à l'université de Sydney

Lancaster signale à Heyde et Seneta l'existence d'un article de Bienaymé intitulé

De la loi de multiplication et de la durée des familles

publié dans le journal de la Société Philomatique de Paris en 1845.

Motivation similaire à celle de Galton et Watson :
On s'est beaucoup occupé de la multiplication possible du nombre des hommes ; et récemment diverses observations très curieuses ont été publiées sur la fatalité qui s'attacherait aux corps de noblesse, de bourgeoisie, aux familles des hommes illustres, etc. ; fatalité qui, dit-on, ferait disparaitre inévitablement ce qu'on a nommé des familles fermées.

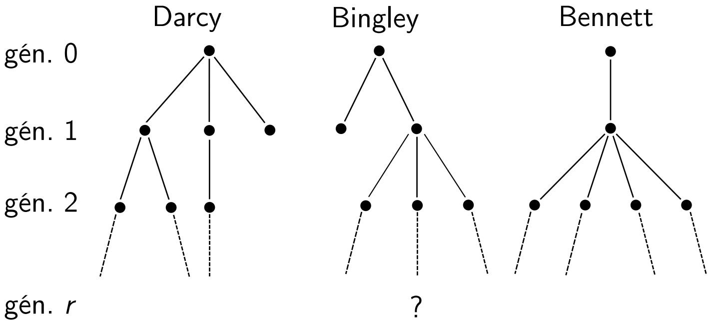
Résultat correct sur la probabilité d'extinction !

$\rightsquigarrow$ Processus de **Bienaymé**-Galton-Watson

Processus de Bienaymé-Galton-Watson (BGW)

Suit l'évolution du nombre d'hommes dans les générations successives d'une famille ou une population.

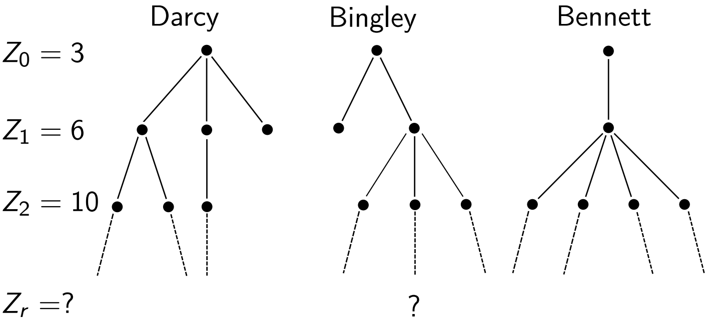
$$(Z_n)_{n\in\mathbb{N}}$$



Processus de Bienaymé-Galton-Watson (BGW)

Suit l'évolution du nombre d'hommes dans les générations successives d'une famille ou une population.

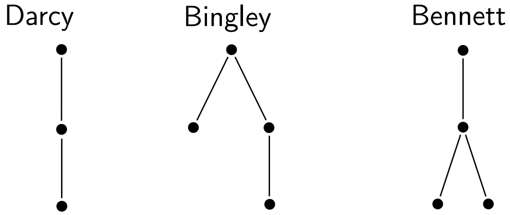
$$(Z_n)_{n\in\mathbb{N}}$$



Processus de Bienaymé-Galton-Watson (BGW)

Suit l'évolution du nombre d'hommes dans les générations successives d'une famille ou une population.

$$(Z_n)_{n\in\mathbb{N}}$$



$Z_0 = 3$

$Z_1 = 4$

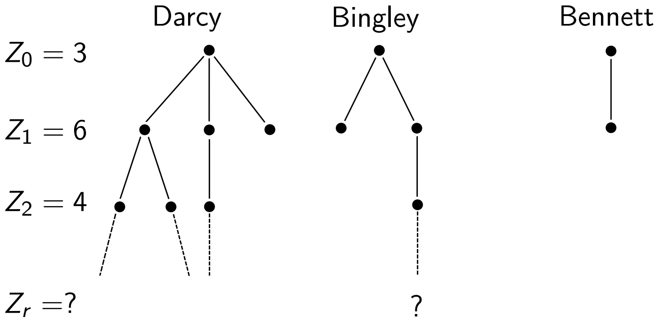
$Z_2 = 4$

$Z_3 = 0$

Processus de Bienaymé-Galton-Watson (BGW)

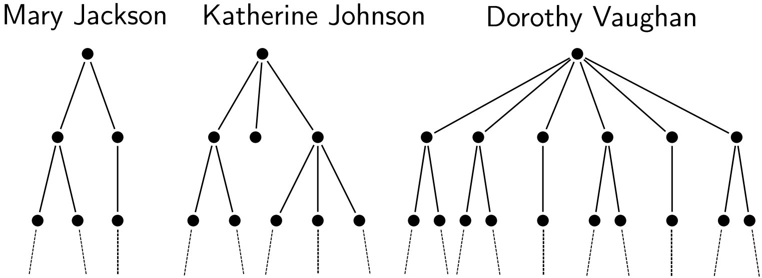
Suit l'évolution du nombre d'hommes dans les générations successives d'une famille ou une population.

$$(Z_n)_{n\in\mathbb{N}}$$



$X_{n,\ell}$ = **variable aléatoire** qui représente le nombre de garçons de l'homme ℓ de la génération n.

$X_{n,\ell}$ = variable aléatoire qui représente le nombre d'**enfants** de l'**individu** ℓ de la génération n.



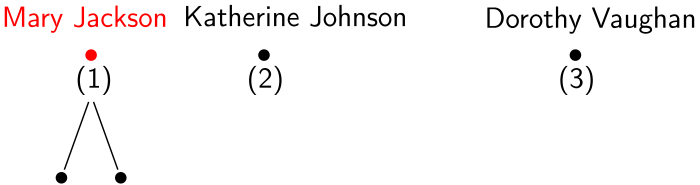
$X_{n,\ell}$ = variable aléatoire qui représente le nombre d'**enfants** de l'**individu** ℓ de la génération n.

Mary Jackson Katherine Johnson Dorothy Vaughan

(1) (2) (3)

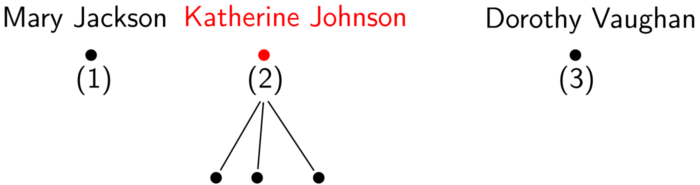
Construction de la génération 1

$X_{n,\ell}$ = variable aléatoire qui représente le nombre d'**enfants** de l'**individu** ℓ de la génération n.



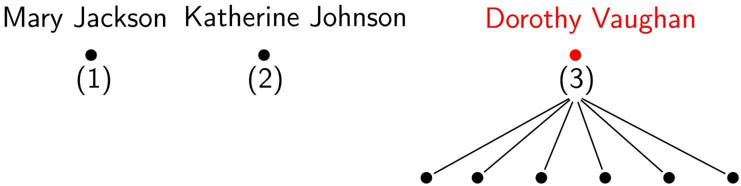
Construction de la génération 1 : $X_{0,1} = 2$

$X_{n,\ell}$ = variable aléatoire qui représente le nombre d'**enfants** de l'**individu** ℓ de la génération n.



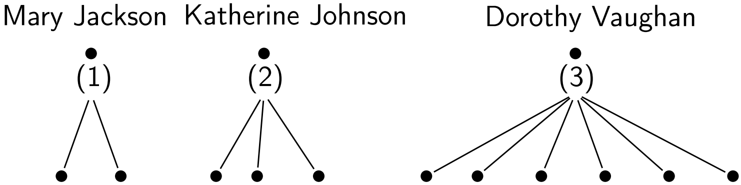
Construction de la génération 1 : $X_{0,2} = 3$

$X_{n,\ell}$ = variable aléatoire qui représente le nombre d'**enfants** de l'**individu** ℓ de la génération n.



Construction de la génération 1 : $X_{0,3} = 6$

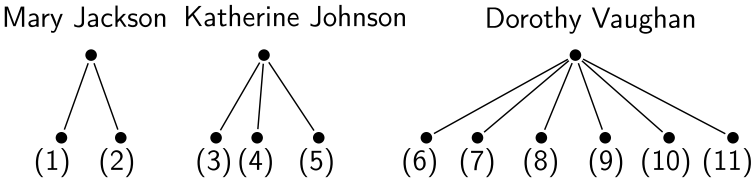
$X_{n,\ell}$ = variable aléatoire qui représente le nombre d'**enfants** de l'**individu** ℓ de la génération n.



Génération 1

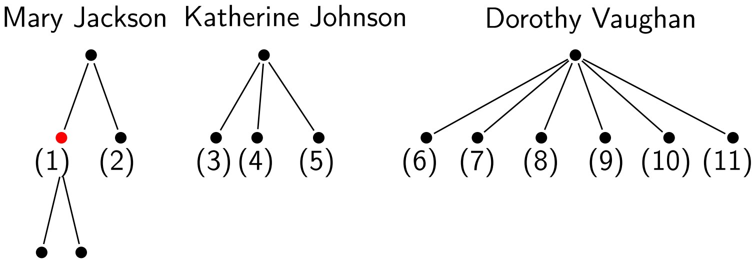
$Z_1 = X_{0,1} + X_{0,2} + X_{0,3}$ (= 11 pour cette réalisation)

$X_{n,\ell}$ = variable aléatoire qui représente le nombre d'**enfants** de l'**individu** ℓ de la génération n.



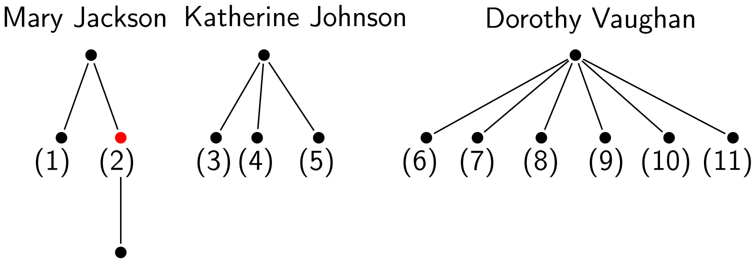
Construction de la génération 2

$X_{n,\ell}$ = variable aléatoire qui représente le nombre d'**enfants** de l'**individu** ℓ de la génération n.



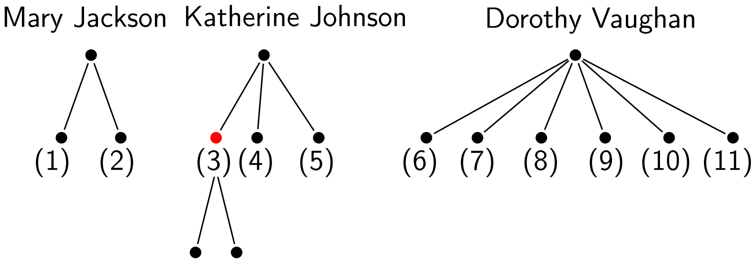
Construction de la génération 2 : $X_{1,1} = 2$

$X_{n,\ell}$ = variable aléatoire qui représente le nombre d'**enfants** de l'**individu** ℓ de la génération n.



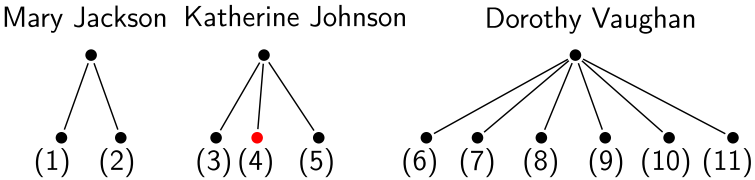
Construction de la génération 2 : $X_{1,2} = 1$

$X_{n,\ell}$ = variable aléatoire qui représente le nombre d'**enfants** de l'**individu** ℓ de la génération n.



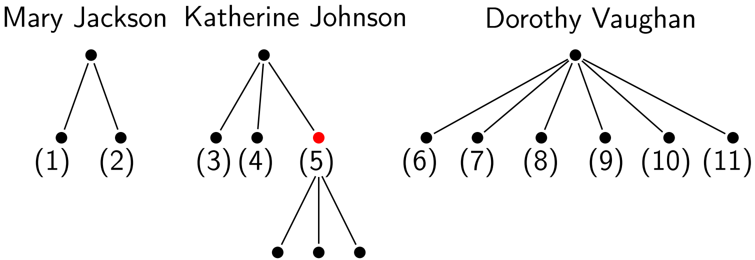
Construction de la génération 2 : $X_{1,3} = 2$

$X_{n,\ell}$ = variable aléatoire qui représente le nombre d'**enfants** de l'**individu** ℓ de la génération n.



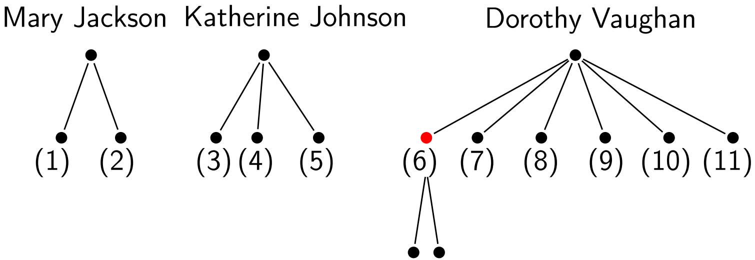
Construction de la génération 2 : $X_{1,4} = 0$

$X_{n,\ell}$ = variable aléatoire qui représente le nombre d'**enfants** de l'**individu** ℓ de la génération n.



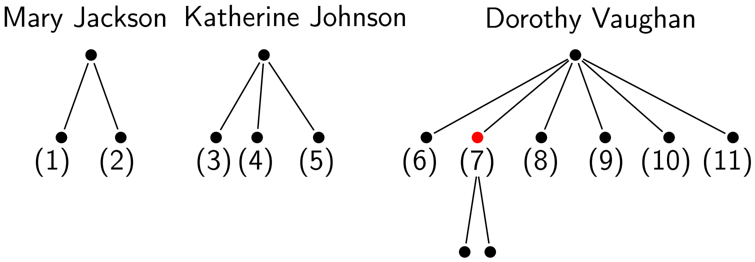
Construction de la génération 2 : $X_{1,5} = 3$

$X_{n,\ell}$ = variable aléatoire qui représente le nombre d'**enfants** de l'**individu** ℓ de la génération n.



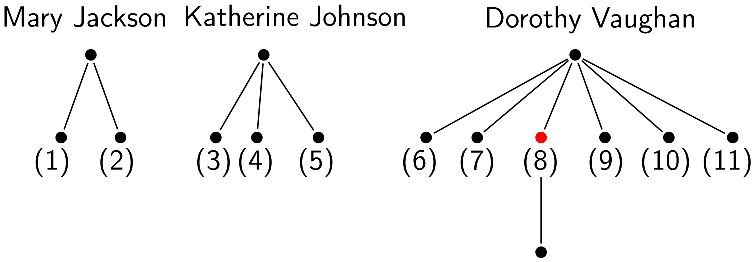
Construction de la génération 2 : $X_{1,6} = 2$

$X_{n,\ell}$ = variable aléatoire qui représente le nombre d'**enfants** de l'**individu** ℓ de la génération n.



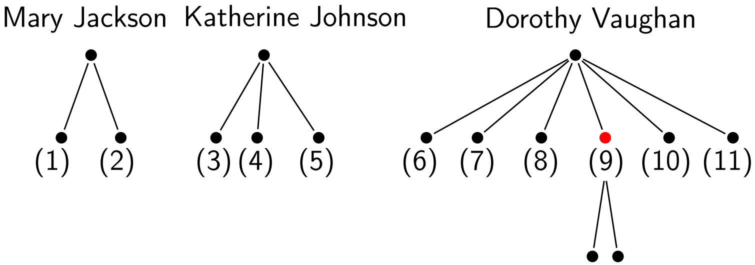
Construction de la génération 2 : $X_{1,7} = 2$

$X_{n,\ell}$ = variable aléatoire qui représente le nombre d'**enfants** de l'**individu** ℓ de la génération n.



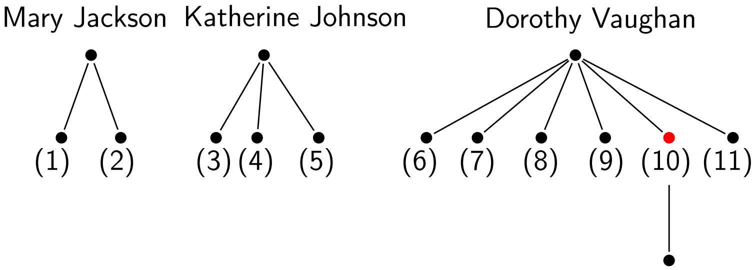
Construction de la génération 2 : $X_{1,8} = 1$

$X_{n,\ell}$ = variable aléatoire qui représente le nombre d'**enfants** de l'**individu** ℓ de la génération n.



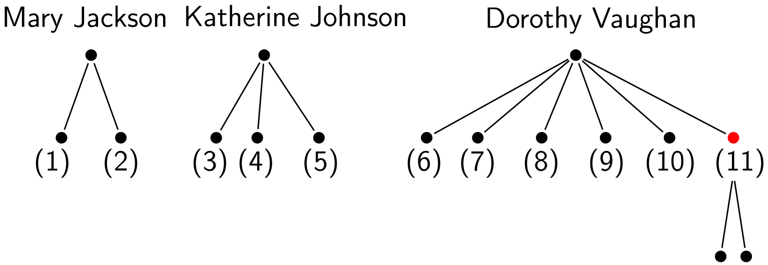
Construction de la génération 2 : $X_{1,9} = 2$

$X_{n,\ell}$ = variable aléatoire qui représente le nombre d'**enfants** de l'**individu** ℓ de la génération n.



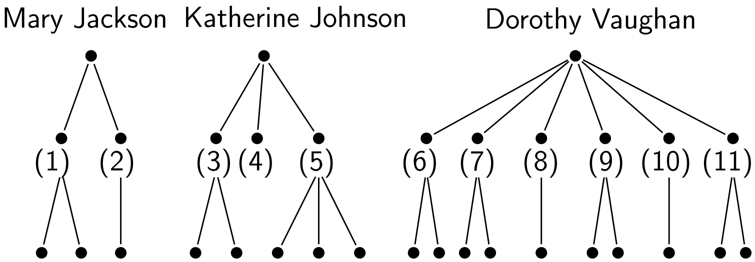
Construction de la génération 2 : $X_{1,10} = 1$

$X_{n,\ell}$ = variable aléatoire qui représente le nombre d'**enfants** de l'**individu** ℓ de la génération n.



Construction de la génération 2 : $X_{1,11} = 2$

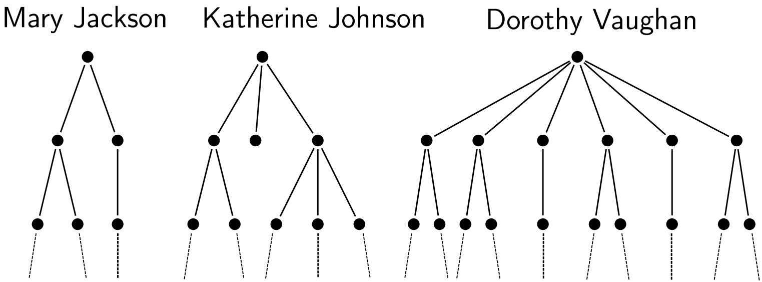
$X_{n,\ell}$ = variable aléatoire qui représente le nombre d'**enfants** de l'**individu** ℓ de la génération n.



Génération 2

$$Z_2 = X_{1,1} + X_{1,2} + \cdots + X_{1,11} \text{ } (= 18 \text{ pour cette réalisation})$$

$X_{n,\ell}$ = variable aléatoire qui représente le nombre d'**enfants** de l'**individu** ℓ de la génération n.



$$Z_{n+1} = \sum_{\ell=1}^{Z_n} X_{n,\ell} = \begin{cases} 0 & \text{si } Z_n = 0 \\ \sum_{\ell=1}^{L} X_{n,\ell} & \text{si } Z_n = L \end{cases}$$

Modèle très simple :

- la loi du nombre d'enfants d'un individu est la même pour tous les individus, à toutes les générations.

Modèle très simple :

- la loi du nombre d'enfants d'un individu est la même pour tous les individus, à toutes les générations.

  $\rightsquigarrow$ les $X_{n,\ell}$ ont **même loi**, appelée loi de reproduction : $P = (p_0, \dots, p_{K_{\max}})$
  - ⋆ p_k = probabilité d'avoir k enfants
  - ⋆ $K_{\max}$ nombre maximal d'enfants.

  Rappel : pour tout k, $p_k \geqslant 0$ et $\sum_{k=0}^{K_{\max}} p_k = 1$.

Modèle très simple :

- la loi du nombre d'enfants d'un individu est la même pour tous les individus, à toutes les générations.

  $\rightsquigarrow$ les $X_{n,\ell}$ ont **même loi**, appelée loi de reproduction : $P = (p_k)_{k \in \mathbb{N}}$

  - $\star$ $p_k =$ probabilité d'avoir k enfants

  Rappel : pour tout k, $p_k \geqslant 0$ et $\sum_{k=0}^{+\infty} p_k = 1$.

Modèle très simple :

- la loi du nombre d'enfants d'un individu est la même pour tous les individus, à toutes les générations.

  $\rightsquigarrow$ les $X_{n,\ell}$ ont **même loi**, appelée loi de reproduction : $P = (p_k)_{k \in \mathbb{N}}$

  - $\star$ $p_k =$ probabilité d'avoir k enfants

  Rappel : pour tout k, $p_k \geqslant 0$ et $\sum_{k=0}^{+\infty} p_k = 1$.

- les individus ont des nombres d'enfants indépendants les uns des autres.

Modèle très simple :

- la loi du nombre d'enfants d'un individu est la même pour tous les individus, à toutes les générations.

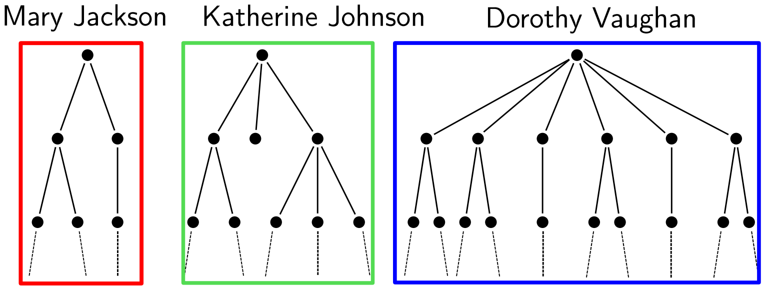
  $\rightsquigarrow$ les $X_{n,\ell}$ ont **même loi**, appelée loi de reproduction : $P = (p_k)_{k\in\mathbb{N}}$

  - ⋆ $p_k =$ probabilité d'avoir k enfants

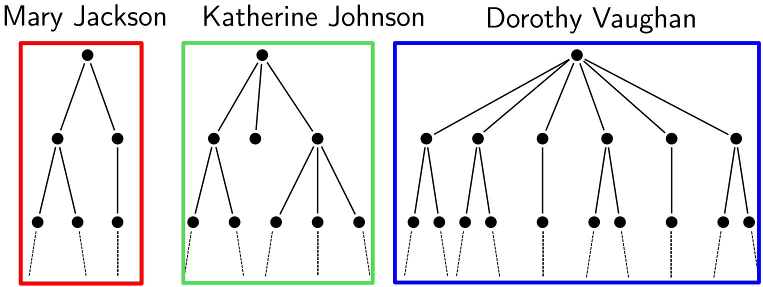
  Rappel : pour tout k, $p_k \geqslant 0$ et $\sum_{k=0}^{+\infty} p_k = 1$.

- les individus ont des nombres d'enfants indépendants les uns des autres.

  $\rightsquigarrow$ les $X_{n,\ell}$ sont **indépendantes**.



Propriété de branchement : si $Z_0 = N$, $(Z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ se comporte comme la somme de N processus indépendants initialisés à 1.



Propriété de branchement : si $Z_0 = N$, $(Z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ se comporte comme la somme de N processus indépendants initialisés à 1.

Dans la suite, on suppose que $Z_0 = 1$.

Des questions ?

Extinction

Rappel : Z_n variable aléatoire qui représente le nombre d'individus dans la génération n.

On cherche à calculer la probabilité que le processus soit éteint après n générations :

$$q_n = \mathbb{P}(Z_n = 0) \in [0, 1].$$

Extinction

Rappel : Z_n variable aléatoire qui représente le nombre d'individus dans la génération n.

On cherche à calculer la probabilité que le processus soit éteint après n générations :

$$q_n = \mathbb{P}(Z_n = 0) \in [0, 1].$$

Remarque : si $Z_n = 0$, alors $Z_{n+1} = 0$.
Donc $\mathbb{P}(Z_n = 0) \leqslant \mathbb{P}(Z_{n+1} = 0)$:

$(q_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite croissante majorée par 1.

$q = \lim_{n \to +\infty} q_n$ est la probabilité d'extinction du processus.

Relation de récurrence entre q_n et q_{n+1}

Rappel : Si A et B sont deux événements avec $\mathbb{P}(B) > 0$,

$$\mathbb{P}_B(A) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)},$$

est la probabilité de A sachant B.

Relation de récurrence entre q_n et q_{n+1}

Rappel : Si A et B sont deux événements avec $\mathbb{P}(B) > 0$,

$$\mathbb{P}_B(A) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)},$$

est la probabilité de A sachant B.

On veut calculer $q_{n+1} = \mathbb{P}(Z_{n+1} = 0)$.

Relation de récurrence entre q_n et q_{n+1}

Rappel : Si A et B sont deux événements avec $\mathbb{P}(B) > 0$,

$$\mathbb{P}_B(A) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)},$$

est la probabilité de A sachant B.

On veut calculer $q_{n+1} = \mathbb{P}(Z_{n+1} = 0)$.

-

$Z_{n+1} = 0$

Relation de récurrence entre q_n et q_{n+1}

Rappel : Si A et B sont deux événements avec $\mathbb{P}(B) > 0$,

$$\mathbb{P}_B(A) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)},$$

est la probabilité de A sachant B.

On veut calculer $q_{n+1} = \mathbb{P}(Z_{n+1} = 0)$.

$Z_{n+1} = 0$

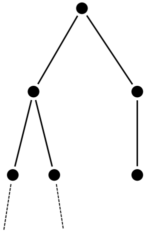
Relation de récurrence entre q_n et q_{n+1}

Rappel : Si A et B sont deux événements avec $\mathbb{P}(B) > 0$,

$$\mathbb{P}_B(A) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)},$$

est la probabilité de A sachant B.

On veut calculer $q_{n+1} = \mathbb{P}(Z_{n+1} = 0)$.



$Z_{n+1} = 0$

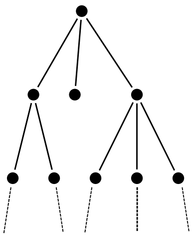
Relation de récurrence entre q_n et q_{n+1}

Rappel : Si A et B sont deux événements avec $\mathbb{P}(B) > 0$,

$$\mathbb{P}_B(A) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)},$$

est la probabilité de A sachant B.

On veut calculer $q_{n+1} = \mathbb{P}(Z_{n+1} = 0)$.



$Z_{n+1} = 0$

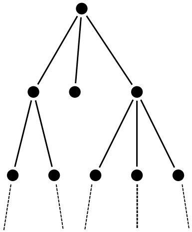
Relation de récurrence entre q_n et q_{n+1}

Rappel : Si A et B sont deux événements avec $\mathbb{P}(B) > 0$,

$$\mathbb{P}_B(A) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)},$$

est la probabilité de A sachant B.

On veut calculer $q_{n+1} = \mathbb{P}(Z_{n+1} = 0)$.



$$q_{n+1} = \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}(Z_{n+1} = 0 \text{ et } Z_1 = k)$$

$Z_{n+1} = 0$

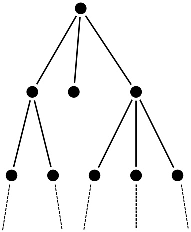
Relation de récurrence entre q_n et q_{n+1}

Rappel : Si A et B sont deux événements avec $\mathbb{P}(B) > 0$,

$$\mathbb{P}_B(A) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)},$$

est la probabilité de A sachant B.

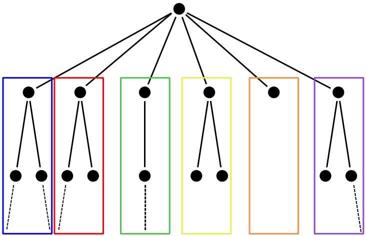
On veut calculer $q_{n+1} = \mathbb{P}(Z_{n+1} = 0)$.



$Z_{n+1} = 0$

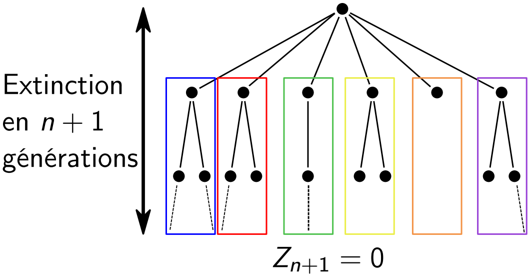
$$\begin{aligned} q_{n+1} &= \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}(Z_{n+1} = 0 \text{ et } Z_1 = k) \\ &= \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}(Z_1 = k)\mathbb{P}_{Z_1=k}(Z_{n+1} = 0). \end{aligned}$$

Propriété de branchement

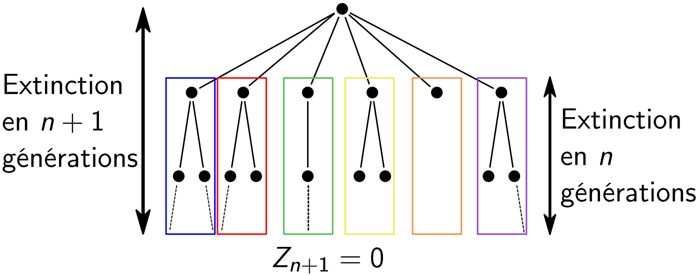


$$Z_{n+1} = 0$$

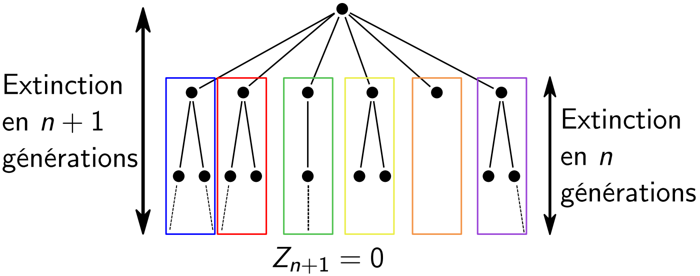
Propriété de branchement



Propriété de branchement

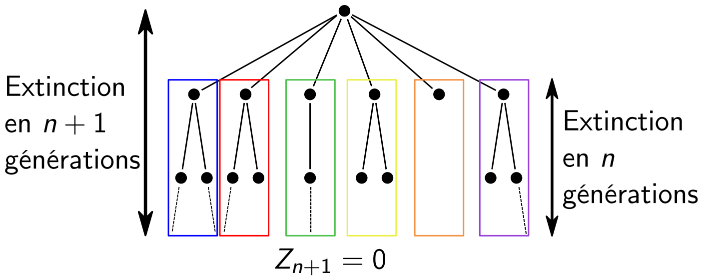


Propriété de branchement



Sachant que $Z_1 = k$, $(Z_{n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ a la même loi que la **somme de k processus indépendants** avec la même loi de reproduction et initialisés à 1.

Propriété de branchement



Sachant que $Z_1 = k$, $(Z_{n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ a la même loi que la **somme de k processus indépendants** avec la même loi de reproduction et initialisés à 1.

$$\mathbb{P}_{Z_1=k}(Z_{n+1}=0) = \mathbb{P}(Z_n=0)^k.$$

On veut toujours calculer $q_{n+1} = \mathbb{P}(Z_{n+1} = 0)$.

$$q_{n+1} = \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}(Z_1 = k)\mathbb{P}_{Z_1=k}(Z_{n+1} = 0).$$

On veut toujours calculer $q_{n+1} = \mathbb{P}(Z_{n+1} = 0)$.

$$q_{n+1} = \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}(Z_1 = k) \underbrace{\mathbb{P}_{Z_1=k}(Z_{n+1} = 0)}_{\mathbb{P}(Z_n=0)^k}.$$

On veut toujours calculer $q_{n+1} = \mathbb{P}(Z_{n+1} = 0)$.

$$q_{n+1} = \sum_{k=0}^{+\infty} \underbrace{\mathbb{P}(Z_1 = k)}_{p_k} \underbrace{\mathbb{P}_{Z_1=k}(Z_{n+1} = 0)}_{\mathbb{P}(Z_n=0)^k}.$$

$Z_0 = 1$ donc la première génération est constituée uniquement des enfants du seul individu de la génération 0.

On veut toujours calculer $q_{n+1} = \mathbb{P}(Z_{n+1} = 0)$.

$$q_{n+1} = \sum_{k=0}^{+\infty} \underbrace{\mathbb{P}(Z_1 = k)}_{p_k} \underbrace{\mathbb{P}_{Z_1=k}(Z_{n+1} = 0)}_{\mathbb{P}(Z_n=0)^k}.$$

$Z_0 = 1$ donc la première génération est constituée uniquement des enfants du seul individu de la génération 0.

On obtient alors :

$$q_{n+1} = \sum_{k=0}^{+\infty} p_k \mathbb{P}(Z_n = 0)^k$$

On veut toujours calculer $q_{n+1} = \mathbb{P}(Z_{n+1} = 0)$.

$$q_{n+1} = \sum_{k=0}^{+\infty} \underbrace{\mathbb{P}(Z_1 = k)}_{p_k} \underbrace{\mathbb{P}_{Z_1=k}(Z_{n+1} = 0)}_{\mathbb{P}(Z_n=0)^k}.$$

$Z_0 = 1$ donc la première génération est constituée uniquement des enfants du seul individu de la génération 0.

On obtient alors :

$$q_{n+1} = \sum_{k=0}^{+\infty} p_k \mathbb{P}(Z_n = 0)^k = \sum_{k=0}^{+\infty} p_k q_n^k$$

On veut toujours calculer $q_{n+1} = \mathbb{P}(Z_{n+1} = 0)$.

$$q_{n+1} = \sum_{k=0}^{+\infty} \underbrace{\mathbb{P}(Z_1 = k)}_{p_k} \underbrace{\mathbb{P}_{Z_1=k}(Z_{n+1} = 0)}_{\mathbb{P}(Z_n=0)^k}.$$

$Z_0 = 1$ donc la première génération est constituée uniquement des enfants du seul individu de la génération 0.

On obtient alors :

$$q_{n+1} = \sum_{k=0}^{+\infty} p_k \mathbb{P}(Z_n = 0)^k = \sum_{k=0}^{+\infty} p_k q_n^k = g(q_n),$$

où $g(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} p_k x^k$ est appelée fonction génératrice de la loi de reproduction.

$(q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite définie par récurrence : $q_{n+1} = g(q_n)$.

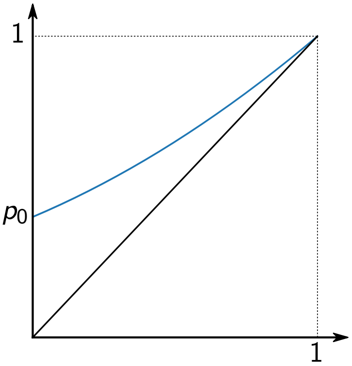
g est continue donc $g(q) = q$ où $q = \lim_{n\to+\infty} q_n$.

Bienaymé et Watson arrivent tous les deux à cette conclusion : q est un point fixe de g sur $[0, 1]$.

$(q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite définie par récurrence : $q_{n+1} = g(q_n)$.

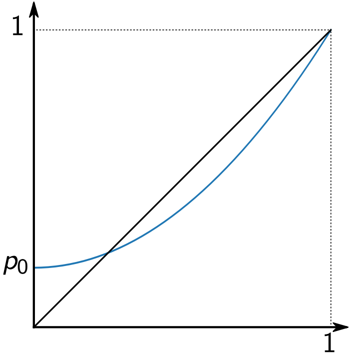
g est continue donc $g(q) = q$ où $q = \lim\limits_{n\to+\infty} q_n$.

Bienaymé et Watson arrivent tous les deux à cette conclusion : q est un point fixe de g sur $[0, 1]$.



$p_0 = \frac{2}{5}$, $p_1 = \frac{2}{5}$, $p_2 = \frac{1}{5}$

$g(x) = \frac{2}{5} + \frac{2}{5}x + \frac{1}{5}x^2$



$p_0 = \frac{1}{10}$, $p_1 = \frac{7}{10}$, $p_2 = \frac{1}{5}$

$g(x) = \frac{1}{10} + \frac{7}{10}x + \frac{1}{5}x^2$

Bienaymé distingue trois cas, selon la valeur m de l'espérance de la loi de reproduction :

$$m = \sum_{k=1}^{+\infty} k p_k .$$

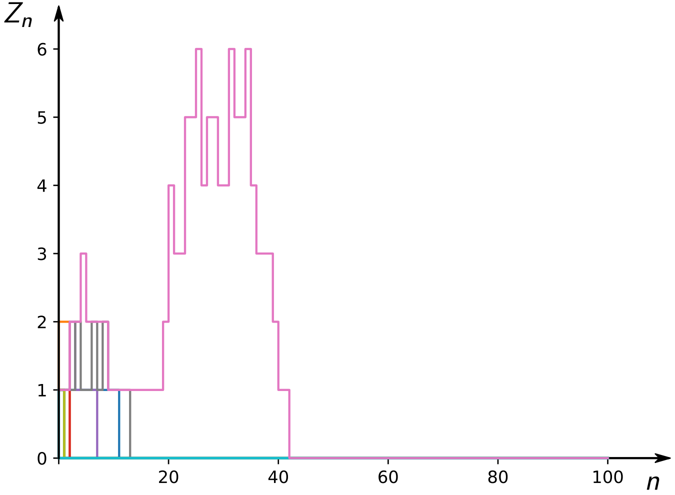
m représente le nombre moyen d'enfants par individu.

Théorème

On suppose que $p_0 > 0$ *et* $p_0 + p_1 < 1$. *Alors*

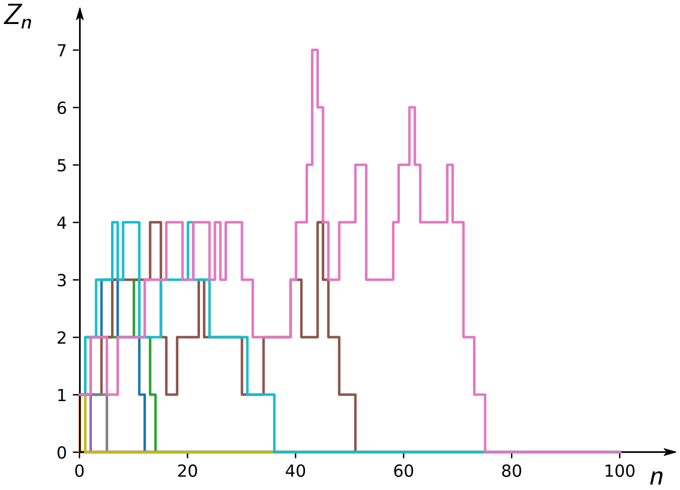
- *si* $m < 1$, *extinction (très rapide), avec probabilité 1 ;*
- *si* $m = 1$, *extinction (moins rapide), avec probabilité 1 ;*
- *si* $m > 1$, *extinction avec probabilité* $q \in]0, 1[$.

Simulations : $m < 1$



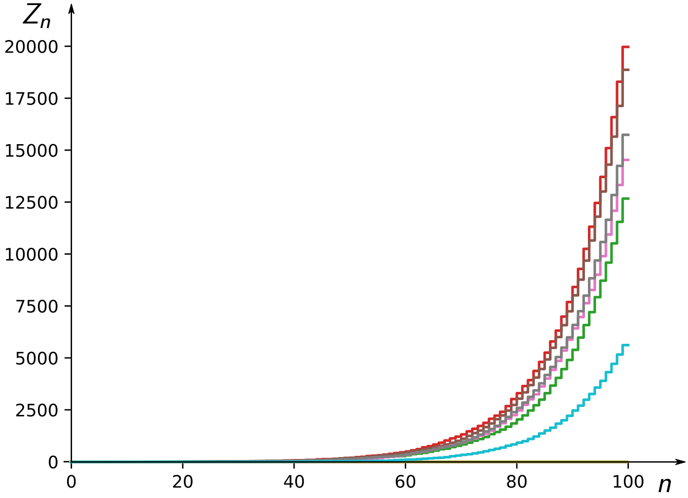
$p_0 = 0.2$, $p_1 = 0.7$ et $p_2 = 0.1$ $(m = 0.9 < 1)$

Simulations : $m = 1$



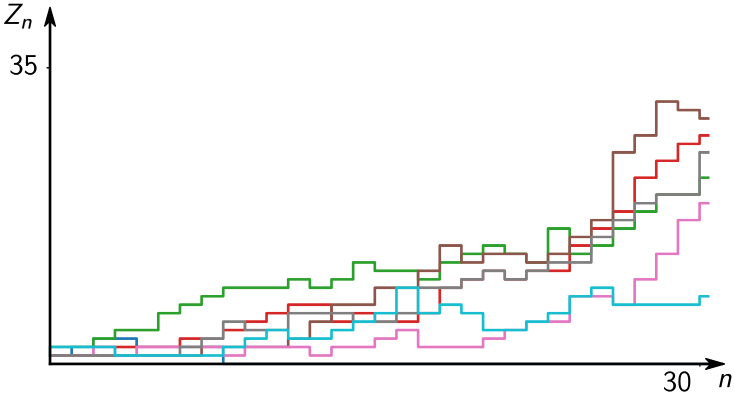
10 trajectoires avec $p_0 = 0.1$, $p_1 = 0.8$ et $p_2 = 0.1$ $(m = 1)$

Simulations : $m > 1$



10 trajectoires avec $p_0 = 0.1$, $p_1 = 0.7$ et $p_2 = 0.2$ $(m = 1.1 > 1)$

Simulations : $m > 1$



10 trajectoires avec $p_0 = 0.1$, $p_1 = 0.7$ et $p_2 = 0.2$ ($m = 1.1 > 1$)

Outil central : la fonction génératrice

$$g(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} p_k x^k.$$

Quelques propriétés :

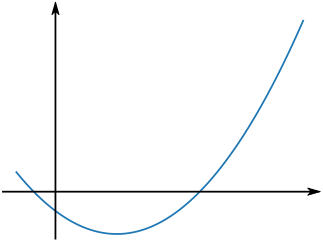
- $g(0) = p_0$, $g(1) = 1$
- si $p_0 + p_1 < 1$, g est strictement convexe.

Outil central : la fonction génératrice

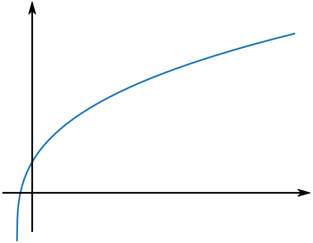
$$g(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} p_k x^k.$$

Quelques propriétés :

- $g(0) = p_0$, $g(1) = 1$
- si $p_0 + p_1 < 1$, g est strictement convexe.



fonction convexe



fonction concave

Outil central : la fonction génératrice

$$g(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} p_k x^k.$$

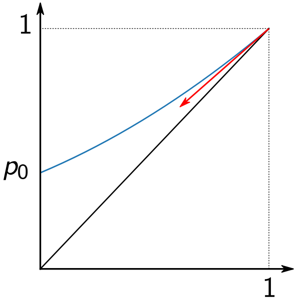
Quelques propriétés :

- $g(0) = p_0$, $g(1) = 1$
- si $p_0 + p_1 < 1$, g est strictement convexe.
- $g'(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} k p_k x^{k-1}$ donc

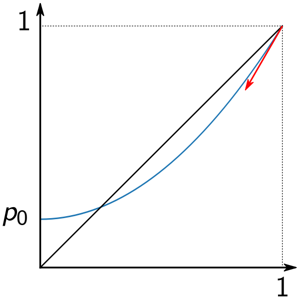
$$g'(1) = \sum_{k=1}^{+\infty} k p_k = m.$$

Or $g'(1)$ est la pente de la tangente à la courbe en 1.

$$g'(1) = \sum_{k=1}^{+\infty} kp_k = m.$$

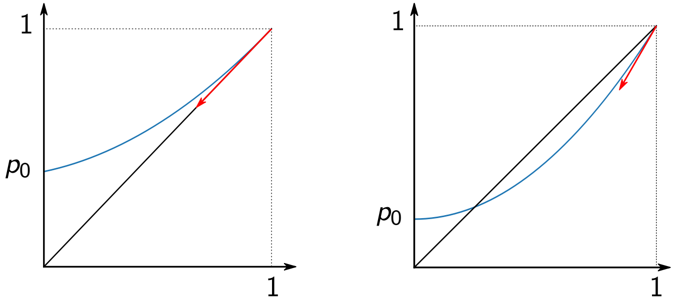


$g'(1) < 1$



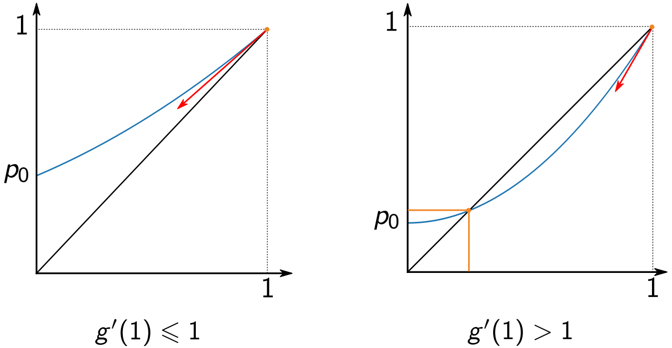
$g'(1) > 1$

$$g'(1) = \sum_{k=1}^{+\infty} k p_k = m.$$



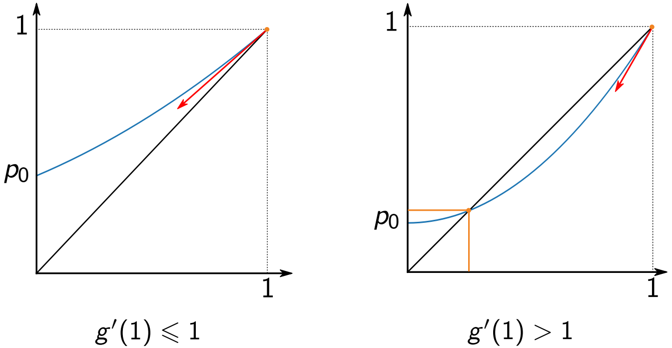
$g'(1) = 1$ $\quad$ $g'(1) > 1$

$$g'(1) = \sum_{k=1}^{+\infty} k p_k = m.$$



Rappel : la probabilité d'extinction q est un point fixe de g dans $[0, 1]$.

$$g'(1) = \sum_{k=1}^{+\infty} kp_k = m.$$

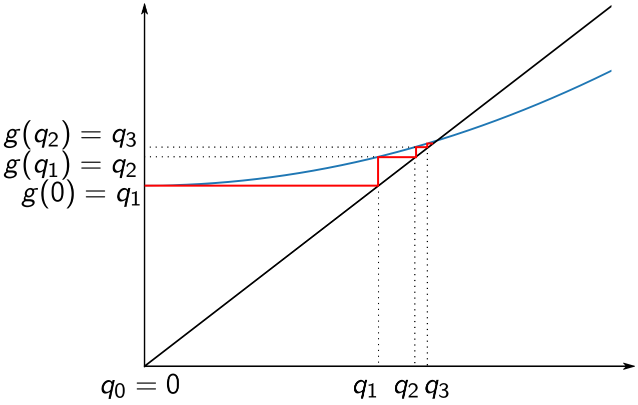


Rappel : la probabilité d'extinction q est un point fixe de g dans $[0, 1]$.

Stricte convexité : au plus 2 solutions de $g(x) = x$ dans $[0, 1]$.

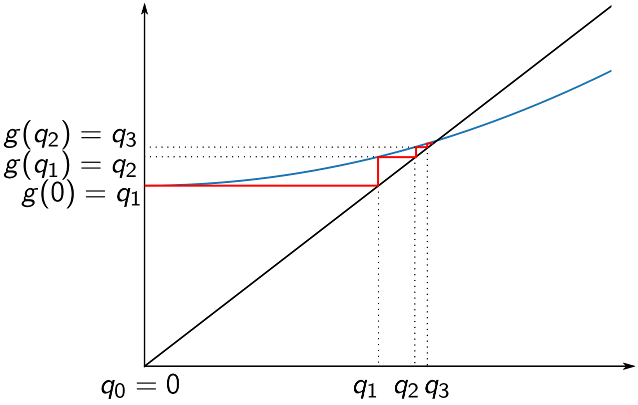
Si $m > 1$

Pour tout n, $q_{n+1} = g(q_n)$ et $q_0 = \mathbb{P}(Z_0 = 0) = 0$



Si $m > 1$

Pour tout n, $q_{n+1} = g(q_n)$ et $q_0 = \mathbb{P}(Z_0 = 0) = 0$



Conclusion

q est la plus petite solution de $g(x) = x$ dans $[0, 1]$.

Declining survival probability threatens the North Atlantic right whale, Caswell, Fujiwara et Brault (1999).

Utilisation d'un processus de Bienaymé-Galton-Watson pour modéliser l'évolution de la population de baleines noires en Atlantique nord.

Les auteurs estiment la loi de reproduction (c'est-à-dire les p_k) à partir des données : $m \leqslant 0.988$.

Ils concluent que la population va s'éteindre et estiment le temps avant extinction (environ 400 ans).

Des questions ?

Plan

Processus multitype

Processus de Bienaymé-Galton-Watson fréquemment utilisés en biologie : déclin d'une espèce animale, transmission d'un trait génétique, évolution d'une épidémie...

Souvent le problème étudié amène à considérer plusieurs types d'individus :

- possession ou non d'un trait génétique,
- sain, exposé, infecté ou guéri pour le suivi d'une épidémie
- ...

À la génération n, $\mathbb{Z}_n = (Z_n^{(1)}, \ldots, Z_n^{(d)})$ où d est le nombre de types.

Modèles aléatoires en écologie et évolution, Méléard (2016).

Propagation d'une maladie contagieuse : $(S_n, I_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

Individu sain S :

- est infecté avec probabilité τ ;
- avec probabilité $(1-\tau)$ est remplacé par un nombre aléatoire d'individus sains : 0 avec probabilité $\frac{1}{4}$ et 1 avec probabilité $\frac{3}{4}$.

Individu infecté I :

- meurt avec probabilité α ;
- avec probabilité $(1-\alpha)$ est remplacé par un nombre aléatoire d'individus infectés : 0 avec probabilité $\frac{1}{4}$ et 1 avec probabilité $\frac{3}{4}$.

espérance du nombre d'enfants	sains	infectés
parent sain	$\frac{3}{4}(1-\tau)$	τ
parent infecté	0	$\frac{3}{4}(1-\alpha)$

Modèles aléatoires en écologie et évolution, Méléard (2016).

Propagation d'une maladie contagieuse : $(S_n, I_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Individu sain S :

- est infecté avec probabilité τ ;
- avec probabilité $(1-\tau)$ est remplacé par un nombre aléatoire d'individus sains : 0 avec probabilité $\frac{1}{4}$ et 1 avec probabilité $\frac{3}{4}$.

Individu infecté I :

- meurt avec probabilité α ;
- avec probabilité $(1-\alpha)$ est remplacé par un nombre aléatoire d'individus infectés : 0 avec probabilité $\frac{1}{4}$ et 1 avec probabilité $\frac{3}{4}$.

$$M = \begin{pmatrix} \frac{3}{4}(1-\tau) & \tau \\ 0 & \frac{3}{4}(1-\alpha) \end{pmatrix}$$

Critère sur M pour déterminer si extinction avec probabilité 1

Sachant un événement atypique

Exemple : modélisation d'une épidémie en phase de décroissance

- que se passe-t-il juste avant l'extinction ?

- que se passe-t-il en cas d'extinction tardive ?

Sachant un événement atypique

Exemple : modélisation d'une épidémie en phase de décroissance

- que se passe-t-il juste avant l'extinction ?
  $\rightsquigarrow$ étudier Z_n sachant que $Z_n > 0$ et $Z_{n+k} = 0$ (k fixé, n devient grand)

- que se passe-t-il en cas d'extinction tardive ?
  $\rightsquigarrow$ étudier Z_n sachant que $Z_k > 0$ (k devient grand)

Sachant un événement atypique

Exemple : modélisation d'une épidémie en phase de décroissance

- que se passe-t-il juste avant l'extinction ?
  $\rightsquigarrow$ étudier Z_n sachant que $Z_n > 0$ et $Z_{n+k} = 0$ (k fixé, n devient grand)

- que se passe-t-il en cas d'extinction tardive ?
  $\rightsquigarrow$ étudier Z_n sachant que $Z_k > 0$ (k devient grand)

Questions abordées dès le milieu du 20^{e} pour le modèle à 1 type, puis à plusieurs types.

Stochastic Methodology for the Study of an Epidemic Decay Phase, Based on a Branching Model, Pénisson et Jacob (2012).

Conclusion

Modèle proposé par Bienaymé, Galton et Watson : très simple mais qui a ouvert de nombreuses perspectives.

Quelques directions de recherche actuelles :

- autour de l'arbre généalogique associé : par exemple, que se passe-t-il s'il est conditionné à un événement atypique ?
- cas multitype : et s'il y a un nombre infini de types ?
- environnement aléatoire : la loi de reproduction évolue de manière aléatoire au fil du temps
- questions analogues avec des processus en temps continu
- ...

Merci pour votre attention ! Des questions ?

Références

- *Actes de la journée du 21 juin 1996 consacrée à Irénée-Jules Bienaymé*, n° 138 des Cahiers du Centre d'analyse et de mathématiques sociales
- *Branching Processes : Variation, Growth, and Extinction of Populations*, Haccou, Jaggers, Vatutin (2005)
- *I. J. Bienaymé : Statistical theory anticipated*, Heyde et Seneta (1977)
- *The Genealogy of Genealogy Branching Processes before (and after) 1873*, Kendall (1975)
- *Modèles aléatoires en écologie et évolution*, Méléard (2016)
- de nombreuses pages Wikipedia