Brevet de technicien supérieur Opticien–lunetier

12 mai 2021

Exercice 1 **10 points**

Les quatre parties de cet exercice peuvent être traitées de façon indépendante

En vue de la commercialisation d'un nouveau modèle de lunettes solaires, une grande chaîne de magasins d'optique a réalisé une enquête auprès de 10 000 clients.
Les conclusions de cette enquête, résumées dans le tableau suivant, donnent le nombre $N(x)$ de clients prêts à acheter ce modèle de lunettes s'il était vendu à x euros l'unité, pour différentes valeurs de x.

Prix x à l'unité (en euros)	60	80	120	160
Nombre $N(x)$ d'acheteurs potentiels	3000	2000	900	400

La direction de cette chaîne de magasins estime par ailleurs que le coût de revient pour la production d'une paire de lunettes de ce modèle s'élève à 55 euros.

A. Ajustement d'un nuage de points

1. On considère qu'un ajustement affine du nuage des points de coordonnées $(x\,;\,N(x))$ n'est pas approprié et on pose $z = \ln(N(x))$ où ln désigne le logarithme népérien.
   Reproduire et compléter le tableau ci-dessous (arrondir les résultats à 10^{-3}).

x	60	80	120	160
$z = \ln(N(x))$				

2. Déterminer à l'aide de la calculatrice une équation de la droite de régression de z en x selon la méthode des moindres carrés, sous la forme $z = ax + b$ où a et b sont arrondis à 10^{-2}.
3. En utilisant l'équation précédente, montrer que le nombre d'acheteurs potentiels peut être modélisé par la fonction N_1 définie pour tout x de l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$ par :

$$N_1(x) = 10\,000\text{e}^{-0{,}02x}.$$

4. Utiliser la fonction précédente pour estimer le nombre d'acheteurs potentiels si les lunettes sont vendues au prix de 100 euros la paire.

B. Modèle discret

1. **a.** Montrer que deux diminutions successives de 33 % correspondent à une diminution globale d'environ 55 %.

   b. En examinant les résultats de l'enquête, la direction de la chaîne de magasin établit qu'à chaque augmentation du prix de 20 € le nombre d'acheteurs potentiels diminue d'environ 33 %.
   Justifier cette analyse.

c. Déterminer le nombre réel positif q tel que $q^{20} = 0,67$. Arrondir à 10^{-2}.
Préciser votre méthode.
Le nombre q est le coefficient multiplicateur moyen d'évolution du nombre d'acheteurs potentiels pour une augmentation de 1 € du prix des lunettes.

2. La direction se fonde sur l'hypothèse que chaque augmentation d'un euro du prix des Lunettes entraîne une diminution de 2 % du nombre d'acheteurs potentiels.
On considère ainsi la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n par :

$$\left\{\begin{array}{rcl} u_0 & = & 10\,000 \\ u_{n+1} & = & u_n - \dfrac{2}{100} \times u_n \end{array}\right.$$

où u_n correspond au nombre d'acheteurs potentiels pour un prix de n euros.

a. Justifier que (u_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison.

b. Pour tout entier naturel n, exprimer u_n en fonction de n.

c. Calculer u_{100} à l'unité près.

C. Modèle continu

On considère l'équation différentielle (E) :

$$y' + 0,02y = 0$$

où y est une fonction inconnue de la variable réelle x définie et dérivable sur $[0\,;\,+\infty[$ et y' sa fonction dérivée.

1. Déterminer les solutions définie sur $[0\,;\,+\infty[$ de l'équation différentielle (E).

On fournit le résultat suivant :

Équation différentielle	Solution sur un intervalle I
$ay' + by = 0$	$y(x) = k\mathrm{e}^{-\frac{b}{a}x}$

2. Déterminer la solution f de l'équation différentielle (E) qui vérifie la condition initiale $f(0) = 10\,000$.

D. Étude d'une fonction

Soit f la fonction définie sur $[0\,;\,+\infty[$ par $f(x) = 10\,000\mathrm{e}^{-0,02x}$.
On pose, pour tout x de l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$, $B(x) = (x-55)f(x)$.

1. L'expression ci-dessous de la dérivée de B a été obtenu à l'aide d'un logiciel de calcul formel.
La ligne d'entrée (%i1) est la ligne de commande d'une écriture factorisée de la dérivée de B.
La ligne notée (%o1) est la ligne de sortie.
Ce logiciel note %e^{-x} la quantité e^{-x}.

```
(%i1) factor(diff((x-55)*10000*exp(-0.02*x),x));
rat : replaced -0.02 by -1/50 = -0.02
rat : replaced -200.0 by -200/1 = -200.0
                           x
                         - --
(%o1) -200(x-105)%e        50
```

Le résultat fourni par le logiciel est admis et n'a pas à être justifié.

a. En déduire le signe de $B'(x)$ sur $[0\,;\,300]$.

b. Donner le tableau de variations de B sur $[0\,;\,300]$.

2. **a.** Justifier que $B(x)$ représente le bénéfice en euros que peut réaliser la chaîne de magasin si elle propose la paire de lunettes au prix de x euros, en supposant que le nombre de ventes est donné en fonction de x par $10\,000\mathrm{e}^{-0,02x}$.

On rappelle que le bénéfice est la différence entre le chiffre d'affaires et le prix de revient.

b. Selon cette étude, quel doit être le prix de vente des lunettes pour que le bénéfice réalisé soit maximal?

Exercice 2 **10 points**

Les trois parties de cet exercice peuvent être traitées de façon indépendante.
Les résultats seront arrondis au centième.

Une entreprise fabrique en grande quantité des branches de lunettes de trois types appelés type 1, type 2 et type 3.

A. Loi normale

Une branche de lunettes de type 1 est considérée comme acceptable si sa longueur exprimée en mm est comprise entre 149 et 151.
Une branche de lunettes est prélevé au hasard dans la production journalière de l'entreprise.
On note X la variable aléatoire qui, à chaque branche de lunettes de la production journalière associe sa longueur.
On admet que X suit la loi normale de moyenne 150 et d'écart type 0,5.

1. *Cette question est un questionnaire à choix multiples. Une seule réponse est correcte. Recopier sur la copie la réponse correcte. On ne demande aucune justification.*

La réponse correcte rapporte un point. Une réponse fausse ou une absence de réponse ne rapporte ni n'enlève de point.

La valeur approchée, arrondie 10^{-2}, de la probabilité qu'une branche de lunette prélevée au hasard dans la production soit acceptable est :

0,95	0,98	0,99

2. À l'aide de la feuille de calcul suivante, déterminer le plus grand nombre réel a tel que $P(X > a) > 0,96$.

B2		f_x	=LOI.NORMALE(A2;150;0,5;VRAI)	
	A	B	C	D
1	k	$P(X \leqslant k)$	$1 - P(X \leqslant k)$	
2	149,1	0,035 9	0,964 1	
3	149,11	0,037 5	0,962 5	
4	149,12	0,039 2	0,960 8	
5	149,13	0,040 9	0,959 1	
6	149,14	0,042 7	0,957 3	
7	149,15	0,044 6	0,955 4	
8	149,16	0,046 5	0,953 5	
9	149,17	0,048 5	0,951 5	
10	149,18	0,050 5	0,949 5	

B. Loi binomiale et loi de Poisson

On considère un stock important de branches de lunettes de type 2 de cette entreprise.
On admet que dans ce stock 2 % des branches de lunettes ne sont pas acceptables.
On prélève au hasard 100 branches de lunettes de ce stock.
Le stock est suffisamment important pour que l'on puisse assimiler ce prélèvement à un tirage avec remise de 100 branches de lunettes.
On note Y la variable aléatoire qui, à tout prélèvement de 100 branches de lunettes, associe le nombre d'entre elles qui ne sont pas acceptables.

1. **a.** Justifier que la variable aléatoire Y suit une loi binomiale dont on déterminera les paramètres.

b. Calculer la probabilité qu'au plus deux branches ne soient pas acceptables dans le prélèvement.

2. On admet que l'on peut approcher la loi de probabilité de Y par une loi de Poisson.

a. Déterminer le paramètre λ de cette loi de Poisson.

b. On note Y_1 une variable aléatoire qui suit cette loi de Poisson.
Calculer la probabilité $P(Y_1 \leqslant 2)$.

C. Test d'hypothèse

La norme prévoit que la longueur des branches de lunette de type 3 est de 150 mm.
On se propose de construire un test d'hypothèse bilatéral pour contrôler la moyenne μ de l'ensemble des longueurs des branches de lunette de type 3 produites pendant une journée par l'entreprise.
On note Z la variable aléatoire qui, à chaque branche de lunettes de type 3 prélevée dans la production journalière, associe sa longueur en millimètres. On admet que Z suit une loi normale de moyenne inconnue μ et d'écart type 0,5.
On désigne par $\overline{Z}$ la variable aléatoire qui, à chaque échantillon de 100 branches de lunettes prélevées dans la production de la journée, associe la moyenne de leurs longueurs.
La production est suffisamment importante pour que l'on puisse assimiler ces prélèvements à des tirages avec remise.

L'hypothèse nulle H_0 est $\mu = 150$.
L'hypothèse alternative H_1 est $\mu \neq 150$.
Le seuil de signification du test est fixé à $0,05$.

1. Sous l'hypothèse nulle H_0, on admet que la variable aléatoire $\overline{Z}$ suit une loi normale de moyenne 150 et d'écart type $\dfrac{0,5}{\sqrt{100}} = 0,05$.
Sous cette hypothèse, déterminer en utilisant la propriété ci-dessous , un réel positif h tel que $P(150 - h \leqslant \overline{Z} \leqslant 150 + h) \approx 0,95$.
Propriété de la loi normale si X est une variable aléatoire de loi normale de moyenne μ et d'écart type σ, $P(\mu - 2\sigma \leqslant X \leqslant \mu + 2\sigma) \approx 0,95$.

2. Énoncer la règle de décision permettant d'utiliser ce test.

3. Un contrôleur prélève un échantillon aléatoire de 100 branches de lunettes dans la production de la journée. Il constate que la moyenne $\overline{z}$ des longueurs des branches est égale à 150,2 mm.
Quelle sera la décision du contrôleur ?