∽ Concours contrôleur des douanes ∾
session 2011

OPTION A : Résolution d'un ou plusieurs problèmes de mathématiques

Exercice 1

On considère (u_n) et (v_n) deux suites définies par $u_0 = 9$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, par :

$$u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n - 3 \qquad \text{et} \qquad v_n = u_n + 6.$$

1. Montrer que la suite v est une suite géométrique et déterminer sa raison.
2. Exprimer $S_n = v_0 + v_1 + v_2 + \ldots + v_n$ puis $S'_n = u_0 + u_1 + u_2 + \ldots + u_n$ en fonction de n.
   (pour déterminer S'_n, on pourra utiliser la relation $u_n = v_n - 6$).
   Déterminer les limites de (S_n) et de $\left(S'_n\right)$ quand n tend vers $+\infty$.
3. On définit à présent, $\forall n \in \mathbb{N}$, la suite (w_n) par : $w_n = \ln(v_n)$.
   Montrer que (w_n) est une suite arithmétique dont on précisera la raison. (à cet effet, on pourra calculer $w_{n+1} - w_n$).
4. Exprimer $S''_n = w_0 + w_1 + w_2 + \ldots + w_n$ en fonction de n puis calculer la limite de $\left(S''_n\right)$.
5. Calculer le produit $P_n = v_0 \cdot v_1 \cdot v_2 \cdots v_n$, en fonction de n.
   En déduire la limite de (P_n).
   (Pour déterminer ce résultat, on exprimera P_n en fonction de S''_n).

Exercice 2

On considère la fonction f définie sur $[0\,;\,+\infty[$ par :

$$f(x) = x\mathrm{e}^{-x+2}$$

On note (C) sa représentation graphique dans un repère orthogonal.

Partie A

1. Dresser le tableau de variations de f sur $[0\,;\,+\infty[$ et déterminer les éventuelles asymptotes de la courbe (C).
2. **a.** Tracer l'allure de la courbe (C) ainsi que celle de la courbe de la fonction logarithme népérien que l'on notera L.
   Déduire du graphique réalisé, le nombre de solutions de l'équation $f(x) = \ln x$ sur $[1\,;\,+\infty[$.

   b. Montrer que la fonction g définie sur $]0\,;\,+\infty[$ par $g(x) = \ln(x) - f(x)$ est strictement croissante sur $[1\,;\,+\infty[$.
   En déduire que l'équation $f(x) = \ln x$ admet une unique solution α sur $[1\,;\,+\infty[$.

Partie B

Soit la fonction h définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = \mathrm{e}^x\left(4 - \mathrm{e}^x\right)$.

1. Déterminer les limites de h en $-\infty$ et en $+\infty$.
2. Soit h' la dérivée de h.

a. Calculer $h'(x)$.

b. Résoudre l'inéquation $2 - \mathrm{e}^x > 0$ et en déduire le signe de $h'(x)$ et le sens de variations de h.

3. Dresser le tableau de variations de h.

4. On considère l'équation $h(x) = 3$.

a. Vérifier que $x = 0$ est solution de cette équation

b. Vérifier la relation $h(x) - 3 = (\mathrm{e}^x - 3)(1 - \mathrm{e}^x)$ et en déduire la valeur de la solution non nulle, λ, de l'équation $h(x) = 3$.

Exercice 3

On réalise une enquête portant sur la réussite à un concours administratif (qui ne comporte qu'une seule épreuve). Cette enquête montre que :

— avant de s'y présenter, 75 % des candidats ont travaillé très sérieusement ce concours;

— lorsqu'un candidat a travaillé très sérieusement ce concours, il l'obtient dans 80 % des cas·,

— lorsqu'un candidat n'a pas beaucoup travaillé ce concours, il ne l'obtient pas dans 70 % des cas.

On interroge au hasard un candidat qui vient de passer le concours (on suppose que les résultats sont connus dès la fin de l'unique épreuve).
On considère les évènements suivants :
T l'évènement « le candidat a travaillé très sérieusement »;
R l'évènement « le candidat est reçu à ce concours »;
Les résultats seront donnés sous forme de décimales (en utilisant des puissances, le cas échéant).

1. **a.** Calculer la probabilité de l'évènement « le candidat a travaillé très sérieusement et est reçu au concours ».

b. Montrer que la probabilité $P(R)$ qu'un candidat soit reçu à ce concours est égale à $0,675$.

2. Le candidat interrogé vient d'échouer au concours. Quelle est la probabilité qu'il ait travaillé très sérieusement?

3. À la sortie de l'épreuve, on interroge au hasard et de façon indépendante 3 candidats.
Calculer la probabilité P_3 d'interroger au moins une personne ayant échoué au concours.