↫ Baccalauréat Amérique du Nord – 20 mai 2026 ↬

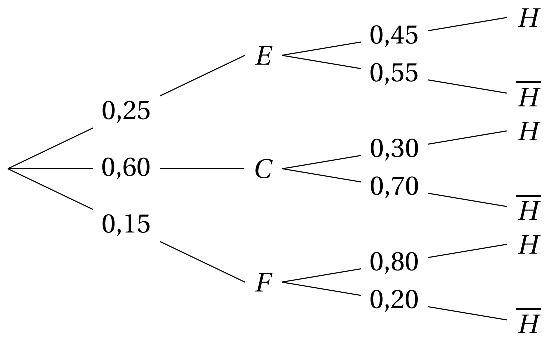
Sujet 1

ÉPREUVE D'ENSEIGNEMENT DE SPÉCIALITÉ

Exercice 1

Partie A

1.



2. Calcul de $p(E \cap H)$:

$$\begin{aligned} P(E \cap H) &= P(E) \times P_E(H) \\ &= 0{,}25 \times 0{,}45 \\ &= 0{,}112\,5 \end{aligned}$$

3. Les évènements E, C et F forment une partition de Ω. D'après la formule des probabilités totales :

$$\begin{aligned} P(H) &= P(E \cap H) + P(C \cap H) + P(F \cap H) \\ &= 0{,}112\,5 + (0{,}60 \times 0{,}30) + (0{,}15 \times 0{,}80) \\ &= 0{,}1125 + 0{,}18 + 0{,}12 \\ &= 0{,}412\,5 \end{aligned}$$

4. Calcul de $P_H(E)$:

$$\begin{aligned} P_H(E) &= \frac{P(E \cap H)}{P(H)} \\ &= \frac{0{,}112\,5}{0{,}412\,5} \\ &\approx 0{,}273 \quad \text{(au millième près)} \end{aligned}$$

Partie B

1. L'expérience consiste en la répétition de $n = 8$ épreuves de Bernoulli identiques et indépendantes (assimilable à un tirage avec remise). Le succès est « l'abonné a activé l'option », de probabilité $p = 0{,}412\,5$. Ainsi, X suit la loi binomiale $\mathscr{B}(8\,;\,0{,}412\,5)$.

2. Calcul de $P(X = 0)$:

$$\begin{aligned} P(X = 0) &= \binom{8}{0} \times 0{,}412\,5^0 \times (1 - 0{,}412\,5)^8 \\ &= 0{,}587\,5^8 \\ &\approx 0{,}014 \end{aligned}$$

3. (a) L'évènement contraire de « au moins un abonné a activé l'option » est « aucun abonné n'a activé l'option » :

$$\begin{aligned} q_n &= 1 - P(X = 0) \\ &= 1 - \binom{n}{0} \times 0{,}412\,5^0 \times 0{,}587\,5^n \\ &= 1 - 0{,}587\,5^n \end{aligned}$$

(b) On doit résoudre l'inéquation $q_n \geqslant 0.999$:

$$\begin{array}{rcll} q_n \geqslant 0{,}999 & \iff & 1-0{,}587\,5^n \geqslant 0{,}999 & \\ & \iff & 0{,}5875^n \leqslant 0{,}001 & \\ & \iff & \ln(0{,}5875^n) \leqslant \ln(0.001) & \text{car ln est croissante sur } \mathbb{R}_+^* \\ & \iff & n \geqslant \dfrac{\ln(0{,}001)}{\ln(0{,}587\,5)} & \text{car } \ln(0{,}587\,5) < 0 \end{array}$$

Comme $\dfrac{\ln(0{,}001)}{\ln(0{,}587\,5)} \approx 12{,}98$, la plus petite valeur de n telle que $q_n \geqslant 0{,}999$ est 13.

Partie C

1. Les valeurs possibles pour Y sont : 5, 7, 10, 12, 16, 18.
2. Loi de Y :

y_i	5	7	10	12	16	18
$P(Y = y_i)$	0.1375	0.1125	0.42	0.18	0.03	0.12

3. Calcul de (EY) :

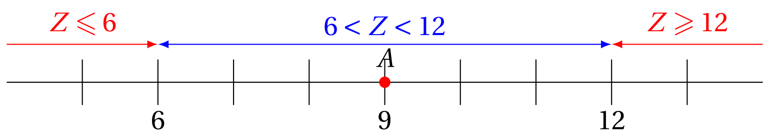
$$\begin{array}{rcl} E(Y) & = & 5\times 0.1375 + 7\times 0.1125 + 10\times 0.42 + 12\times 0.18 + 16\times 0.03 + 18\times 0.12 \\ & = & 0{,}687\,5 + 0{,}787\,5 + 4.2 + 2.16 + 0.48 + 2.16 \\ & = & 10.475 \end{array}$$

   En moyenne, un abonné rapporte 10,475 € par mois à la plateforme.
4. À la calculatrice, on obtient une variance $V(Y) \approx 13.70$.
5. (a) $V(Z) = \sigma^2 = 2^2 = 4$.

   (b) D'après l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev pour tout réel $a > 0$:

$$P(|Z - E(Z)| \geqslant a) \leqslant \frac{V(Z)}{a^2}.$$

   (c) Avec $E(Z) = 9$ et $a = 3$, on a : $P(|Z-9| \geqslant 3) \leqslant \dfrac{4}{9}$. Le contraire de l'évènement $|Z-9| \geq 3$ est l'évènement $|Z-9| < 3$. Or $|Z-9| < 3 \Leftrightarrow -3 < Z-9 < 3 \Leftrightarrow 6 < Z < 12$.
   Notons que $\{|Z-9| \geq 3\} = \{Z \leq 6\} \cup \{Z \geq 12\}$.



   Ainsi,

$$P(6 < Z < 12) = 1 - P(|Z-9| \geqslant 3) \geqslant 1 - \frac{4}{9},$$

   donc

$$P(6 < Z < 12) \geqslant \frac{5}{9}.$$

   Comme $\dfrac{5}{9} > \dfrac{4{,}5}{9} = 0{,}50$, l'affirmation est justifiée.

Exercice 2

Partie A

1. $u_1 = 4 - \dfrac{4}{u_0} = 4 - \dfrac{4}{4} = 3$. Il y aura 3 000 perches-soleil.
2. (a) La fonction h est dérivable sur $]0\,;\,+\infty[$.

$$h'(x) \quad = \quad 0 - 4 \times \left(-\frac{1}{x^2}\right) = \frac{4}{x^2}$$

Pour tout $x > 0$, $h'(x) > 0$. La fonction h est donc strictement croissante sur $]0\,;\,+\infty[$.

(b) Montrons par récurrence que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad 2 \leqslant u_{n+1} \leqslant u_n \leqslant 4$$

Initialisation : Pour $n = 0$, on a $u_0 = 4$, $u_1 = 3$ et $u_2 = 4 - \dfrac{4}{3} = \dfrac{8}{3} \approx 2{,}66$. On a bien $2 \leqslant u_2 \leqslant u_1 \leqslant 4$. La propriété est vérifiée au rang 0.

Hérédité : Soit $n \in mathbbN$, ($n \geqslant 0$ et $2 \leqslant h(u_{n+1}) \leqslant h(u_n) \leqslant 4$.

La fonction h étant croissante sur $]0\,;\,+\infty[$, les images par celle-ci des quatre nombres précédents sont rangés dans le même ordre que ceux-ci :

$$h(2) \leqslant h(u_{k+1}) \leqslant h(u_k) \leqslant h(4).$$

Or $h(2) = 2$, $h(u_{n+1}) = u_{n+2}$, $h(u_n) = u_{n+1}$ et $h(4) = 3 \leqslant 4$. D'où

$$2 \leqslant u_{n+2} \leqslant u_{n+1} \leqslant 4.$$

La propriété est vraie au rang $n+1$.

Conclusion :

La propriété est vraie au rang 0 et si elle vraie au rang n, elle l'est aussi au rang $n+1$: d'après le principe de récurrence :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \quad 2 \leqslant u_{n+1} \leqslant u_n \leqslant 4}.$$

(c) En particulier

— $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} \leqslant u_n$ signifie que la suite (u_n) est décroissante;

— $\forall n \in \mathbb{N}, \quad 2 \leqslant u_n$ signifie que la suite (u_n) est minorée par 2

Minorée et décroissante la suite u_n converge donc vers une limite ℓ qui vérifie $2 \leqslant \ell$.

(d) Comme quel que soit $n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = h(u_n) = 4 - \dfrac{4}{u_n}$ que la fonction h est dérivable, donc continue sur $]0\,;\,+\infty[$, l'égalité précédente donne à la limite par continuité : $\ell = 4 - \dfrac{4}{\ell}$ la relation de récurrence $u_{n+1} = h(u_n)$, (ℓ est un point fixe de h).

$$\begin{aligned} \ell = 4 - \frac{4}{\ell} \quad &\iff \quad \ell^2 = 4\ell - 4 \\ &\iff \quad \ell^2 - 4\ell + 4 = 0 \\ &\iff \quad (\ell - 2)^2 = 0 \\ &\iff \quad (\ell - 2) = 0 \\ &\iff \quad \ell = 2 \end{aligned}$$

On a donc $\boxed{\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 2}$

(e) La limite étant de 2 (soit 2 000 individus), ce modèle ne prévoit pas lui non plus d'élimination à long terme de l'espèce.

3. (a) Le script complété est :

```
 def population(s):
u=4
n=0
while u>= s:
  u=4-4/u
  n=n+1
return n
```

(b) En exécutant l'algorithme, on trouve que la commande `population(2.2)` renvoie $n = 10$. Cela signifie que c'est au bout de 10 ans (soit en 2035) que la population de perches-soleil passera en dessous de 2 200 individus pour la première fois.

Partie B

1. L'équation (E) est une équation différentielle de la forme $ay' + by = c$, les solutions sont de la forme

$$y(t) = K\mathrm{e}^{-\frac{b}{a}t} + \frac{c}{a} = K\mathrm{e}^{-t} + 2, \text{ avec} K \in \mathbb{R}.$$

2. Calcul de K en utilisant la condition initiale $p(0) = 4$. La fonction p étant solution de (E), on a $p(x) = K\mathrm{e}^{-x} + 2$. De plus :

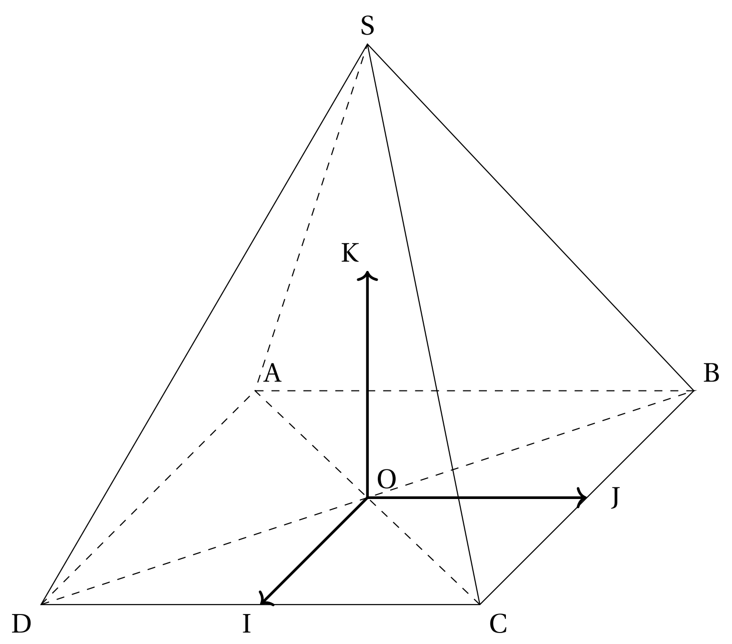
$$\begin{aligned} p(0) = 4 &\iff K\mathrm{e}^0 + 2 = 4 \\ &\iff K + 2 = 4 \\ &\iff K = 2 \end{aligned}$$

La fonction p, qui est la solution de (E) vérifiant $p(0) = 4$, est donc

$$\boxed{p(t) = 2\mathrm{e}^{-t} + 2}.$$

3. Comme $\displaystyle\lim_{t \to +\infty} \mathrm{e}^{-t} = 0$, $\displaystyle\lim_{t \to +\infty} p(t) = 2$. Ce modèle continu prévoit également une stabilisation à 2 000 individus, sans élimination.

Exercice 3



Partie A

1. Puisque O est l'origine du repère et que la base carrée est de côté 2 avec le centre en O, on a A$(-1\,;\,-1\,;\,0)$ et D$(1\,;\,-1\,;\,0)$.
2. D'après la formule du produit scalaire :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{SC}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{SB}} &= \begin{pmatrix}1\\1\\-2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-1\\1\\-2\end{pmatrix}\\ &= (1)(-1)+(1)(1)+(-2)(-2)\\ &= -1+1+4\\ &= 4\end{aligned}$$

3. D'après la définition géométrique du produit scalaire $\overrightarrow{SC}\cdot\overrightarrow{SB} = SC\times SB\times\cos(\widehat{\mathrm{BSC}})$. On a donc :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{SC}\cdot\overrightarrow{SB} &= SC\times SB\times\cos(\widehat{\mathrm{BSC}})\\ 4 &= \sqrt{1^2+1^2+(-2)^2}\times\sqrt{(-1)^2+1^2+(-2)^2}\times\cos(\widehat{\mathrm{BSC}})\\ 4 &= \sqrt{6}\times\sqrt{6}\times\cos(\widehat{\mathrm{BSC}})\\ \cos(\widehat{\mathrm{BSC}}) &= \frac{4}{6}=\frac{2}{3}\end{aligned}$$

On en déduit $\widehat{\mathrm{BSC}} = \arccos(\frac{2}{3}) \approx 48{,}2(°)$.

Partie B

1. (a) Le vecteur $\overrightarrow{n}$ est normal au plan (SBC) s'il est orthogonal à deux vecteurs directeurs non colinéaires de ce plan, par exemple $\overrightarrow{SB}$ et $\overrightarrow{SC}$. Or :
$$\left\{\begin{aligned}\overrightarrow{n}\cdot\overrightarrow{SB} &= 0(-1)+2(1)+1(-2)=0\\ \overrightarrow{n}\cdot\overrightarrow{SC} &= 0(1)+2(1)+1(-2)=0\end{aligned}\right.$$
On en déduit que $\overrightarrow{n}$ est orthogonal aux vecteurs $\overrightarrow{\mathrm{SB}}$ et $\overrightarrow{\mathrm{SC}}$, $\overrightarrow{n}$ est donc un vecteur normal au plan (SBC).

   (b) Le vecteur $\overrightarrow{n}(0{,}2{,}1)$ étant normal au plan (SBC), ce dernier admet une équation cartésienne de la forme $0x+2y+1z+d=0$. Le point S(0;0;2) appartient au plan (SBC), donc les coordonnées de ce point vérifie l'équation du plan (SBC) et on a donc $2(0)+1(2)+d=0 \iff d=-2$.
Une équation de (SBC) est donc bien

$$\boxed{2y+z-2=0}.$$

2. (a) La droite (OH) est perpendiculaire au plan (SBC) donc $\overrightarrow{n}$, qui est normal à (SBC), est aussi un vecteur directeur de (OH). Cette droite passe par O(0; 0; 0). Une représentation paramétrique est donc : $\left\{\begin{array}{l}x=0+0t=0\\ y=0+2t=2t\\ z=0+1t=t\end{array}\right.\quad (t\in\mathbb{R})$

   (b) H appartient à (OH) et à (SBC), on a donc :

   — $H\in(\mathrm{OH}) \iff \exists t\in\mathbb{R}, \left\{\begin{array}{lcl}x_{\mathrm{H}} &=& 0\\ y_{\mathrm{H}} &=& 2t\\ z_{\mathrm{H}} &=& t\end{array}\right.$
   — $\mathrm{H}\in(\mathrm{SBC}) \iff 2y_{\mathrm{H}}+z_{\mathrm{H}}-2=0$

   Le paramètre t, qui définit la position de H sur (OH), est donc solution de :

$$\begin{aligned}2(2t)+t-2=0 &\iff 5t=2\\ &\iff t=\frac{2}{5}\end{aligned}$$

On a donc :

$$\begin{cases} x_H = 0 \\ y_H = 2 \times \frac{2}{5} = \frac{4}{5} \\ z_H = \frac{2}{5} \end{cases}$$

Les coordonnées de H, projeté orthogonal de O sur le plan (SBC) sont donc $\boxed{\left(0\ ;\ \frac{4}{5}\ ;\ \frac{2}{5}\right)}$.

(c) Calcul de la hauteur :

$$\begin{aligned} OH &= \sqrt{0^2 + \left(\frac{4}{5}\right)^2 + \left(\frac{2}{5}\right)^2} \\ &= \sqrt{\frac{16}{25} + \frac{4}{25}} \\ &= \sqrt{\frac{20}{25}} = \frac{\sqrt{20}}{5} = \frac{2\sqrt{5}}{5} \end{aligned}$$

Partie C

1. (a) Volume de $SABCD$:

$$\begin{aligned} V_{\text{SABCD}} &= \frac{1}{3} \times (2 \times 2) \times 2 \\ &= \frac{8}{3} (\text{ cm}^3) \end{aligned}$$

(b) La pyramide OCBS a pour base le triangle OCB, dont l'aire est le quart de l'aire du carré ABCD (soit $\frac{1}{4} \times 4 = 1$), donc :

$$\begin{aligned} V_{\text{OCBS}} &= \frac{1}{3} \times \text{Aire(OCB)} \times \text{OS} \\ &= \frac{1}{3} \times 1 \times 2 \\ &= \frac{2}{3} (\text{ cm}^3) \end{aligned}$$

2. Le triangle SBC est isocèle en S. La hauteur issue de S passe par J(milieu de [BC]). Les coordonnées de J sont $(0\ ;\ 1\ ;\ 0)$. Ainsi :

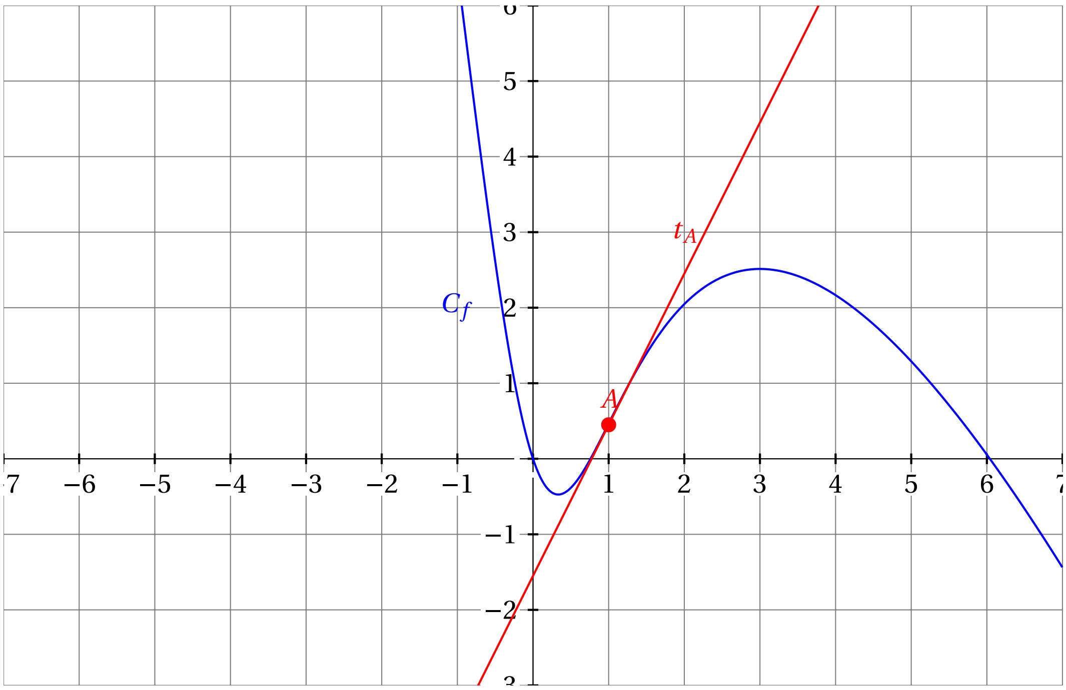
$$\begin{aligned} \text{SJ} &= \sqrt{0^2 + 1^2 + (-2)^2} = \sqrt{5} \\ \text{Aire(SBC)} &= \frac{\text{BC} \times \text{SJ}}{2} = \frac{2 \times \sqrt{5}}{2} = \sqrt{5} \text{ cm}^2 \end{aligned}$$

3. On peut calculer le volume du tétraèdre OCBS en prenant pour base SBC et pour sommet O. Son volume est V_{OCBS} s'exprime en fonction de l'aire de SCB et de la hauteur OH et est égal à $\frac{2}{3}$. En utilisant les deux questions précédentes, on obtient donc :

$$\begin{aligned} V_{\text{OCBS}} &= \frac{1}{3} \times \text{Aire(SBC)} \times d(\text{O,(SBC)}) \\ \iff \quad \frac{2}{3} &= \frac{1}{3} \times \sqrt{5} \times d \\ \iff \quad d &= \frac{2}{\sqrt{5}} = \boxed{\frac{2\sqrt{5}}{5} \text{ cm}} \end{aligned}$$

Exercice 4

Étude de la fonction $f : x \mapsto 5\ln(x^2 + 1) - 3x$.



1. Graphiquement, la courbe semble convexe sur l'intervalle $[-1\ ;\ 1]$ et concave sur les intervalles $]-\infty\ ;\ -1]$ et $[1\ ;\ +\infty[$.
2. Calcul de limite :

$$\left.\begin{array}{rcl}\lim\limits_{x\to-\infty}(x^2+1) & = & +\infty \\ \lim\limits_{X\to+\infty}\ln(X) & = & +\infty\end{array}\right\} \Rightarrow \lim_{x\to-\infty}\ln(x^2+1) = +\infty \text{(limite d'une composée)}$$

De plus :

$$\left.\begin{array}{rcl}\lim\limits_{x\to-\infty}\ln(x^2+1) & = & +\infty \\ \lim\limits_{x\to-\infty}-3x & = & +\infty\end{array}\right\} \Rightarrow \lim_{x\to-\infty}f(x) = +\infty \text{(somme de limites)}$$

3. (a) Pour tout $x > 0$:

$$\begin{array}{rcll} f(x) & = & 5\ln\left(x^2\left(1+\dfrac{1}{x^2}\right)\right)-3x & \\ & = & 5\left(\ln(x^2)+\ln\left(1+\dfrac{1}{x^2}\right)\right)-3x & \text{car } \ln(ab)=\ln(a)+\ln(b) \\ & = & 10\ln(x)+5\ln\left(1+\dfrac{1}{x^2}\right)-3x & \text{car } \ln(a^2)=2\ln(a) \\ & = & x\left(10\dfrac{\ln(x)}{x}-3\right)+5\ln\left(1+\dfrac{1}{x^2}\right) & \end{array}$$

(b) Par croissances comparées, $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln(x)}{x} = 0$, on a donc :

$$\left.\begin{array}{rcl}\lim\limits_{x\to+\infty}\left(10\dfrac{\ln(x)}{x}-3\right) & = & -3 \\ \lim\limits_{x\to+\infty}x & = & +\infty\end{array}\right\} \Rightarrow \lim_{x\to+\infty}x\left(10\frac{\ln(x)}{x}-3\right) = -\infty \text{ (produit de limites)}$$

De plus :

$$\left.\begin{array}{rcl}\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\dfrac{1}{x^2}\right) & = & 1 \\ \lim\limits_{X\to1}\ln(X) & = & 0\end{array}\right\} \Rightarrow \lim_{x\to+\infty}\ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right) = 0 \text{ (limite d'une composée)}$$

On a donc (somme de limites) :

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty}$$

4. Variations de f :

   (a) Calculons la dérivée de f :

$$\begin{aligned} f'(x) &= 5\times\frac{2x}{x^2+1}-3 \\ &= \frac{10x-3(x^2+1)}{x^2+1} \\ &= \frac{-3x^2+10x-3}{x^2+1} \end{aligned}$$

   (b) Le signe de $f'(x)$ dépend du numérateur $-3x^2+10x-3$; en effet $\forall x\in\mathbb{R}, x^2+1>0$. Le numérateur est un polynôme du second degré dont la représentation graphique est concave ($a<0$). Calculons ses racines :

$$\begin{aligned} \Delta &= 10^2-4\times(-3)\times(-3) = 100-36 = 64 \\ x_1 &= \frac{-10-8}{-6} = 3 \\ x_2 &= \frac{-10+8}{-6} = \frac{1}{3} \end{aligned}$$

   On en déduit le tableau de variations suivant :

x	$-\infty$		$1/3$		3		$+\infty$
Signe de $f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
Variations de f	$+\infty$	$\searrow$	$f(\frac{1}{3})$	$\nearrow$	$f(3)$	$\searrow$	$-\infty$

   Avec $f(3) = 5\ln(10)-9$ et $f(\frac{1}{3}) = 5\ln(\frac{10}{9})-1$.

5. On a $f''(x) = \frac{-10x^2+10}{(x^2+1)^2}$

   (a) Le signe de $f''(x)$ dépend uniquement du numérateur car $\forall x\in\mathbb{R}, (x^2+1)^2>0$. Le numérateur est un polynôme du second degré dont la représentation graphique est concave ($a<0$). Ses racines sont : -1 et 1. On en déduit que :

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
Signe de $f''(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
Convexité de f		Concave		Convexe		Concave	

   La fonction est donc bien convexe sur $[-1\ ;\ 1]$ et concave ailleurs. La conjecture est validée.

   (b) La tangente à C_F au point d'abscisse 1 a pour équation $y = f'(1)(x-1)+f(1)$. Or :

$$\begin{aligned} f(1) &= 5\ln(2)-3 \\ f'(1) &= \frac{-3+10-3}{2} = 2 \end{aligned}$$

   L'équation de la tangente est donc

$$y = f'(1)(x-1) + f(1) \iff y = 2(x-1) + 5\ln(2) - 3 \iff \boxed{y = 2x - 5 + 5\ln(2)}.$$

(c) Pour $x \geqslant 1$, la fonction f est concave, sa courbe $\mathcal{C}_f$ est donc située en dessous de ses tangentes, en particulier en dessous de la tangente en A. On a donc $\forall x \in [1\ ;\ +\infty[$:

$$\begin{array}{rcl} f(x) & \leqslant & 2x - 5 + 5\ln(2) \\ 5\ln(x^2+1) - 3x & \leqslant & 2x - 5 + 5\ln(2) \\ 5\ln(x^2+1) & \leqslant & 5x - 5 + 5\ln(2) \\ \ln(x^2+1) & \leqslant & x - 1 + \ln(2) \end{array}$$