Épreuve I

Amérique-Antilles-Guyane

L'épreuve se déroule en deux parties indépendantes de deux heures chacune. Les énoncés des deux parties sont donc séparés et distribués séparément à des moments différents.
La première partie est constituée des exercices nationaux. À son issue, les copies sont ramassées et une pause de cinq à quinze minutes est prévue, avant la seconde partie, constituée des exercices académiques.
Des consignes de confinement peuvent être données selon la zone géographique de passation de l'épreuve.
Les calculatrices sont autorisées selon la réglementation en vigueur.
Il est conseillé aux candidats qui ne pourraient formuler une réponse complète à une question d'exposer le bilan des initiatives qu'ils ont pu prendre. Les énoncés doivent être rendus au moment de quitter définitivement la salle de composition.
La première partie de l'épreuve contient trois exercices.
Les candidats de voie générale ayant suivi l'enseignement de spécialité de mathématiques doivent traiter les exercices nationaux 1 et 2.
Les autres candidats doivent traiter les exercices nationaux 1 et 3.

Exercice 1. L'oiseau et le cerf-volant

1. Réalisation de la figure
À partir du segment [AB] tracé sur la feuille annexe :

- tracer le point C tel que dans le triangle ABC, l'angle en A vaut 30° et l'angle en B vaut 45° ;
- tracer le point D, symétrique du point C par rapport au segment [AB] ;
- noter H le point d'intersection des segments [AB] et [CD] ;

- noter E le point d'intersection des droites (AC) et (BD);
- noter F le point d'intersection des droites (AD) et (BC);
- tracer le triangle AEF;
- à partir du point I milieu de [EF], tracer les segments [IC] et [ID] qui coupent respectivement les segments [BE] et [BF] en J et K.

Le cerf-volant est le quadrilatère ACBD et l'oiseau est le polygone AEJIKF.
On pose AB = 1.

2. On cherche les dimensions du cerf-volant ACBD.
   a. Déterminer la nature des triangles ACD et BCD.
   b. Déterminer AH et CH en fonction de AC pour en déduire AC puis BC.
   c. En déduire l'aire $\mathscr{S}$ et le périmètre $\mathscr{P}$ de ce cerf-volant.
3. On cherche quelques dimensions de l'oiseau AEJIKF.
   a. Déterminer la nature des triangles AEF et BEF.
   b. Démontrer que $AE = 1 + \sqrt{3}$; en déduire CE.
   c. Calculer BE.
4. On « décore » le cerf-volant en dessinant son cercle inscrit noté $(\mathscr{C})$.
   On dit qu'un cercle est inscrit dans un polygone si ce cercle est tangent à tous les côtés de ce polygone.
   On admet la propriété :

   Un quadrilatère MNPQ possède un cercle inscrit si, et seulement si,

   $$MN + PQ = MQ + NP.$$

   a. Pourquoi le cerf-volant ACBD possède-t-il un cercle inscrit ?
   On note $\mathscr{S}$ l'aire du cerf-volant et $\mathscr{P}$ son périmètre.
   Le rayon R du cercle inscrit $(\mathscr{C})$ est donné par $R = \dfrac{2\mathscr{S}}{\mathscr{P}}\cdot$ Calculer R.
   b. Déterminer la distance AG où G est le centre du cercle inscrit $(\mathscr{C})$ en admettant que G est sur le segment [AB].
   c. Placer le point P tel que B soit le milieu de [AP] puis calculer la distance CP.
   d. En déduire alors une construction du point G, centre du cercle inscrit $(\mathscr{C})$.
   e. Construire le cercle inscrit $(\mathscr{C})$.
5. On « décore » l'oiseau en dessinant le cercle inscrit $(\mathscr{C}')$ du triangle BCE.
   a. Déterminer l'aire $\mathscr{S}'$ et le périmètre $\mathscr{P}'$ du triangle BCE.
   b. Calculer le rayon R' du cercle inscrit $(\mathscr{C}')$ du triangle BCE en admettant que l'on a $R' = \dfrac{2\mathscr{S}'}{\mathscr{P}'}\cdot$
   c. Comment construire le centre de ce cercle $(\mathscr{C}')$ sans aucun calcul ?
6. Terminer le dessin en construisant le cercle $(\mathscr{C}')$ ainsi que son symétrique par rapport à la droite (AB).

Annexe

Exercice 2. Le jeu des 4 nombres

Notation

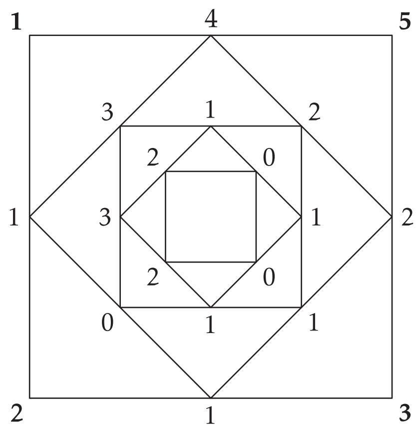
Soit x un nombre réel, on rappelle que la valeur absolue de x, notée $|x|$, est définie de la façon suivante :

$$|x| = x \text{ si } x \geqslant 0 \text{ et } |x| = -x \text{ si } x < 0.$$

Par exemple, $|2| = 2$, $|-3| = 3$, $|2-3| = |-1| = 1$.

Introduction

On choisit quatre nombres entiers naturels, par exemple 1, 5, 3 et 2. On place ces nombres sur les sommets d'un carré en suivant le sens des aiguilles d'une montre. Au milieu de chaque côté, on inscrit la valeur absolue de la différence des nombres placés aux extrémités de ce côté. Cette opération engendre une nouvelle liste de quatre entiers naturels, placés aux quatre sommets d'un nouveau carré plus petit. On répète ensuite cette opération.
On a représenté ci-contre les quatre premières étapes.



Si on note $Q^{(0)} = (a, b, c, d)$ le quadruplet d'entiers initial, le quadruplet obtenu après une opération est appelé *quadruplet dérivé* et est noté $Q^{(1)}$. Le quadruplet dérivé de $Q^{(1)}$ est noté $Q^{(2)}$, le quadruplet dérivé de $Q^{(2)}$ sera noté $Q^{(3)}$, etc.
Dans l'exemple ci-dessus, on a :

$$Q^{(0)} = (1, 5, 3, 2)\,;\ Q^{(1)} = (4, 2, 1, 1)\,;\ Q^{(2)} = (2, 1, 0, 3)\,;\ Q^{(3)} = (1, 1, 3, 1)\,;$$
$$Q^{(4)} = (0, 2, 2, 0)\,;\ Q^{(5)} = (2, 0, 2, 0)\,;\ Q^{(6)} = (2, 2, 2, 2)\,;\ Q^{(7)} = (0, 0, 0, 0).$$

Première partie

1. Déterminer les quadruplets successifs obtenus en partant de $Q^{(0)} = (2, 5, 9, 16)$ et $Q^{(0)} = (1, 2, 2, 5)$;
2. Déterminer un quadruplet de nombres entiers tel que l'on obtienne quatre zéros au bout de :

   a. 1 étape, **b.** 2 étapes, **c.** 3 étapes, **d.** 8 étapes ;

   Dans ces exemples on obtient quatre zéros au bout d'un nombre fini d'étapes.
   On admet dans cette partie que c'est effectivement le cas quel que soit le quadruplet initial choisi ; la démonstration de ce résultat fera l'objet de la deuxième partie.

3. On considère $Q^{(0)} = (a, b, c, d)$. Déterminer une expression de $Q^{(1)}$ en fonction de a, b, c, d ;
4. Démontrer qu'il n'existe pas de quadruplet $Q^{(0)}$ de quatre nombres entiers dont $(1, 8, 21, 45)$ soit le dérivé ;
5. On appelle *temps de vol* du quadruplet $Q^{(0)} = (a, b, c, d)$ le nombre d'étapes nécessaires pour atteindre quatre zéros. Par exemple, le temps de vol de $(1, 5, 3, 2)$ est égal à 7.

   Rédiger un algorithme qui réalise les tâches suivantes :

   - obtention du temps de vol maximal d'un quadruplet (a, b, c, d) de quatre entiers compris entre 0 et 99,
   - obtention d'un quadruplet possédant ce temps de vol.

Deuxième partie

On démontre dans cette partie que pour tout quadruplet d'entiers naturels on obtient quatre zéros en un nombre fini d'étapes.

1. Soit (a, b, c, d) un quadruplet d'entiers naturels.

   a. Démontrer que si $Q^{(i)} = (a, b, c, d)$, alors l'un au moins des quadruplets $Q^{(i)}$, $Q^{(i+1)}$, $Q^{(i+2)}$, $Q^{(i+3)}$ ou $Q^{(i+4)}$ est composé de quatre entiers pairs,

   b. Démontrer que si le quadruplet $Q^{(0)} = (a, b, c, d)$ admet comme temps de vol l'entier i, alors il en est de même du quadruplet $(2a, 2b, 2c, 2d)$,

2. Pour tout quadruplet $Q = (a, b, c, d)$ d'entiers naturels, on note $\max Q$ le plus grand des entiers a, b, c, d.

   a. Démontrer que pour tout entier naturel i, on a : $\max Q^{(i+1)} \leqslant \max Q^{(i)}$,

   b. Est-il vrai que pour tout entier naturel i tel que $Q^{(i)} \neq (0, 0, 0, 0)$, on a : $\max Q^{(i+1)} < \max Q^{(i)}$?

   c. Déduire des questions précédentes que, pour tout quadruplet $Q^{(0)} = (a, b, c, d)$ d'entiers naturels, il existe un entier i tel que $Q^{(i)} = (0, 0, 0, 0)$. *Pour répondre à cette question, on pourra utiliser le fait qu'il n'existe pas de suite infinie d'entiers naturels strictement décroissante.*

Troisième partie

1. On s'intéresse aux cas où l'on part d'un quadruplet de nombres non nécessairement entiers. Déterminer les quadruplets successifs en partant de $Q^{(0)} = (0, 1, 6, \pi)$;
2. On admet l'existence d'un réel de $]1 ; 2[$ noté q tel que $q^3 - q^2 - q - 1 = 0$. Montrer qu'en partant de $Q^{(0)} = (1, q, q^2, q^3)$ on n'obtient pas quatre zéros en un nombre fini d'étapes. Que peut-on cependant remarquer ?

Exercice 3. Les nombres palindromes

Un nombre palindrome est un entier naturel non nul qui peut se lire de la même manière de gauche à droite ou de droite à gauche comme par exemple 78 987 ou encore 123 321.

Partie A. Généralités

1.

a. Combien existe-t-il de nombres palindromes à 2 chiffres ? Justifier.

b. Combien existe-t-il de nombres palindromes à 3 chiffres ? Justifier.

c. Déterminer le nombre de nombres palindromes à 241 chiffres.

2.

a. Donner deux nombres palindromes à 11 chiffres comportant chacun au moins deux chiffres différents.

b. Donner deux nombres palindromes à 12 chiffres comportant chacun au moins deux chiffres différents.

3. Pour tout réel x, on note $\mathrm{E}(x)$ sa partie entière, c'est-à-dire le plus grand entier m tel que $m \leqslant x$.

On admet que pour entier naturel $n < 10\,000$, écrit $n = 1\,000a + 100b + 10c + d$ (écriture décimale où a, b, c, d sont des entiers compris entre 0 et 9) :

- le chiffre des milliers de n est $a = \mathrm{E}\left(\dfrac{n}{1\,000}\right)$;
- le chiffre des centaines de n est $b = \mathrm{E}\left(\dfrac{n - 1\,000a}{100}\right)$;
- le chiffre des dizaines de n est $c = \mathrm{E}\left(\dfrac{n - 1\,000a - 100b}{10}\right)$;
- le chiffre des unités de n est $d = n - 1\,000a - 100b - 10c$.

En utilisant la fonction partie entière, donner un algorithme permettant de déterminer si un entier à quatre chiffres est un palindrome (on pourra utiliser la fonction partie entière).

a. On rappelle que l'écart entre deux nombres réels x et y, quand $x < y$, est le réel positif $y - x$. Donner l'écart entre les nombres proposés en 2a.

b. Donner un exemple de nombres palindromes distincts à quatre chiffres, d'écart 11.

c. Démontrer que 11 est l'écart minimal entre deux nombres palindromes distincts à quatre chiffres.

Partie B. Nombres palindromes et divisibilité par 11

Dans cette partie, on souhaite étudier et démontrer la propriété suivante.

> Tout nombre palindrome ayant un nombre pair de chiffres est divisible par 11.

1.

a. Démontrer que le nombre palindrome 123 321 s'écrit sous la forme

$$a_0 \times 11 + a_1 \times 1\,001 + a_2 \times 100\,001$$

où on déterminera les entiers naturels a_0, a_1 et a_2.

b. Montrer que 123 321 est divisible par 11.

2. On définit $N_k = 1 + 10^{2k+1}$ où k est un nombre entier naturel.
On admet que pour tout réel x et pour tout entier naturel n non nul, on a :

$$1 - x^n = (1-x)(1 + x + x^2 + \cdots + x^{n-1}).$$

a. Montrer que N_k est divisible par 11.

b. En déduire que si un entier naturel est un nombre palindrome ayant un nombre pair de chiffres, alors il est divisible par 11.

c. La réciproque de cette propriété est-elle vraie ?

Corrigé de l'exercice 1

1.

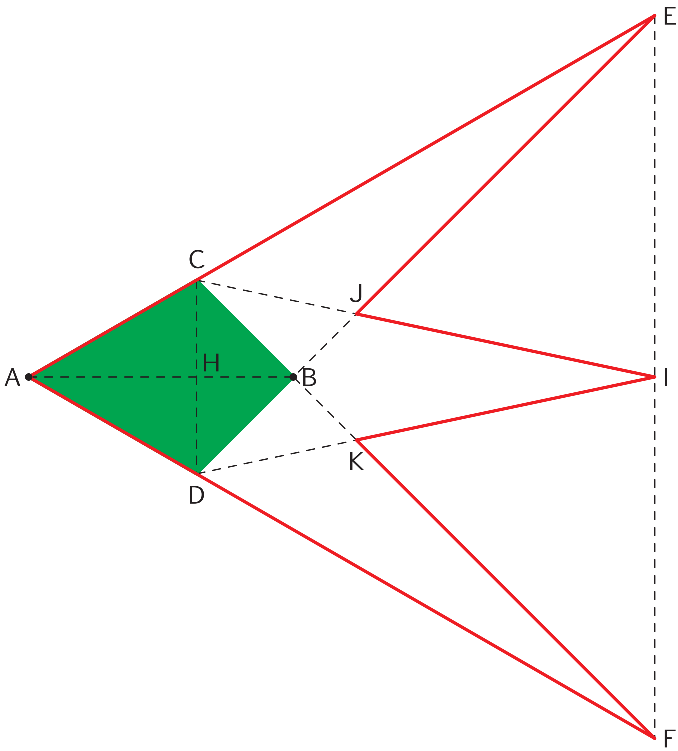


Figure I.1 : *Le cerf-volant est en vert ; l'oiseau est le contour rouge.*

2. **a.** Notons σ la symétrie axiale d'axe la droite (AB). $\sigma(\text{A}) = \text{A}$ et $\sigma(\text{C}) = \text{D}$ donc AC = AD : le triangle ACD est isocèle.

D'autre part, l'angle $\widehat{\text{BAC}}$ mesure 30°, donc l'angle $\widehat{\text{BAD}}$ mesure aussi 30° ; la mesure de l'angle $\widehat{\text{CAD}}$ est donc 60° ; ACD est donc un triangle isocèle avec un des trois angles qui mesure 60°, c'est donc un triangle équilatéral.

$\boxed{\text{ACD est un triangle équilatéral}}$

On démontre de la même manière que BCD est un triangle isocèle (sommet principal : B). Puisque l'angle $\widehat{\text{CBA}}$ mesure 45°, alors l'angle $\widehat{\text{DBA}}$ mesure aussi 45° ; la mesure de l'angle $\widehat{\text{CBD}}$ est donc 90° ; le triangle BCD est donc isocèle rectangle.

$\boxed{\text{BCD est un triangle isocèle rectangle, de sommet principal B}}$

b. On a immédiatement :

$$\boxed{\mathrm{AH} = \mathrm{AC}\cos(30) = \frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{AC}}$$

$$\boxed{\mathrm{CH} = \mathrm{AC}\sin(30) = \frac{1}{2}\mathrm{AC}}$$

D'autre part, le triangle HBC est aussi un triangle isocèle rectangle (de sommet principal H), donc $\mathrm{CH} = \mathrm{BH}$.

Alors $\mathrm{AB} = \mathrm{AH} + \mathrm{HB} = \frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{AC} + \frac{1}{2}\mathrm{AC} = \frac{1+\sqrt{3}}{2}\mathrm{AC}$. Puisque $\mathrm{AB} = 1$, il vient $\mathrm{AC} = \frac{2}{1+\sqrt{3}} = \sqrt{3}-1$.

$$\boxed{\mathrm{AC} = \sqrt{3}-1}$$

Enfin, $\mathrm{BC} = \sqrt{2}\mathrm{CH} = \sqrt{2}\frac{1}{2}\mathrm{AC} = \sqrt{2}\frac{1}{2}(\sqrt{3}-1) = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}$.

$$\boxed{\mathrm{BC} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}}$$

c. Par la symétrie σ, on sait que l'aire $\mathscr{S}$ est égale à deux fois l'aire du triangle ABC. Or, l'aire de ce triangle est égale à $\frac{1}{2}\mathrm{CH}\times\mathrm{AB}$.

Donc $\mathscr{S} = \mathrm{CH}\times\mathrm{AB} = \frac{1}{2}\mathrm{AC}\times\mathrm{AB} = (\sqrt{3}-1)\times 1 = \sqrt{3}-1$.

$$\boxed{\mathscr{S} = \sqrt{3}-1}$$

$$\begin{aligned}
\mathscr{P} &= \mathrm{AC}+\mathrm{CB}+\mathrm{BD}+\mathrm{DA}\\
&= \mathrm{AC}+\mathrm{CB}+\mathrm{BC}+\mathrm{CA} \quad \text{par la symétrie } \sigma\\
&= 2\mathrm{AC}+2\mathrm{CB}\\
&= 2(\sqrt{3}-1)+2\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}\\
&= (\sqrt{3}-1)(2+\sqrt{2})
\end{aligned}$$

$$\boxed{\mathscr{P} = (\sqrt{3}-1)(2+\sqrt{2})}$$

3. a. Par la symétrie σ, l'image de la droite (AC) est la droite (AD) et l'image de la droite (DB) est la droite (CB) ; donc l'image de E, point d'intersection de (AC) et (DB), est le point d'intersection de (AD) et (CB), c'est-à-dire F.

Donc $\mathrm{AE} = \mathrm{AF}$: le triangle AEF est isocèle ; d'autre part, de la même façon qu'à la question 2a, l'angle $\widehat{\mathrm{EAF}}$ mesure 60° et donc, par le même raisonnement, on en déduit que le triangle AEF est équilatéral.

$$\boxed{\text{AEF est un triangle équilatéral}}$$

On raisonne encore avec σ : puisque $\sigma(\mathrm{B}) = \mathrm{B}$ et que $\sigma(\mathrm{E}) = \mathrm{F}$, on en déduit que BE = BF : le triangle BEF est isocèle, de sommet principal B.

En outre, la mesure de l'angle $\widehat{\mathrm{EBF}}$ est égale à la mesure de l'angle $\widehat{\mathrm{DBC}}$ (angles opposés par le sommet) et cette dernière mesure est égale à 90°. Donc BEF est isocèle rectangle, de sommet principal B.

$\boxed{\text{BEF est un triangle isocèle rectangle, de sommet principal B}}$

b. De la même façon qu'à la question 2b (expression de AH en fonction de AC), on a : $\mathrm{AI} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{AE}$ et (expression de CH puis de HB en fonction de AC) : $\mathrm{BI} = \mathrm{EI} = \dfrac{1}{2}\mathrm{AE}$.

Donc : $1 = \mathrm{AB} = \mathrm{AI} - \mathrm{BI} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{AE} - \dfrac{1}{2}\mathrm{AE} = \dfrac{\sqrt{3}-1}{2}\mathrm{AE}$.

Alors : $\mathrm{AE} = \dfrac{2}{\sqrt{3}-1} = \sqrt{3}+1$. $\boxed{\mathrm{AE} = 1+\sqrt{3}}$

Alors : $\mathrm{CE} = \mathrm{AE} - \mathrm{AC} = (1+\sqrt{3}) - (\sqrt{3}-1) = 2$. $\boxed{\mathrm{CE} = 2}$

c. Le triangle BCE est un triangle rectangle en B donc

$$\begin{aligned}
\mathrm{BE}^2 = \mathrm{CE}^2 - \mathrm{BC}^2 &= 4 - \left(\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}\right)^2\\
&= 4 - \frac{8-2\sqrt{12}}{4}\\
&= 4 - 2 + \frac{2\sqrt{3}}{2}\\
&= 2+\sqrt{3}\\
\mathrm{BE} &= \sqrt{2+\sqrt{3}}\\
&= \sqrt{\frac{4+2\sqrt{3}}{2}}\\
&= \sqrt{\frac{(\sqrt{3}+1)^2}{2}}\\
&= \frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{2}}\\
&= \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}
\end{aligned}$$

$$\boxed{\mathrm{BE} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}}$$

4. **a.** Par la symétrie σ, on sait que AC = AD et que BD = BC = CB ; donc AC + BD = AD + CB ; on applique alors la propriété admise et on en déduit immédiatement que

$$\boxed{\text{ACBD admet un cercle inscrit}}$$

On a vu à la question 2c que $\mathscr{S} = \sqrt{3}-1$ et que $\mathscr{P} = (\sqrt{3}-1)(\sqrt{2}+2)$. Donc $R = \dfrac{\sqrt{3}-1}{(\sqrt{3}-1)(\sqrt{2}+2)} = \dfrac{1}{\sqrt{2}+2} = \dfrac{2-\sqrt{2}}{2}$.

$$\boxed{R = \dfrac{2-\sqrt{2}}{2}}$$

b. Si on appelle L le point de contact entre le segment AC et le cercle inscrit dans le cerf-volant, on a :

- le triangle ALG est rectangle en L ;
- la distance GL est égale à R, c'est-à-dire $\dfrac{2-\sqrt{2}}{2}$;
- l'angle $\widehat{\text{GAL}}$ mesure 30°.

Donc $\dfrac{\text{GL}}{\text{AG}} = \sin(30) = \dfrac{1}{2}$. On obtient donc : $\text{AG} = 2\text{GL} = 2R = 2-\sqrt{2}$.

$$\boxed{\text{AG} = 2-\sqrt{2}}$$

c. Le triangle CHP est un triangle rectangle en H.

$\text{HC} = \dfrac{1}{2}\text{AC} = \dfrac{\sqrt{3}-1}{2}$; $\text{HP} = \text{AP}-\text{AH} = 2 - \dfrac{\sqrt{3}}{2}(\sqrt{3}-1) = \dfrac{1+\sqrt{3}}{2}$. Donc :

$$\begin{aligned}
\text{CP}^2 &= \text{HC}^2 + \text{HP}^2\\
&= \left(\frac{\sqrt{3}-\sqrt{1}}{2}\right)^2 + \left(\frac{1+\sqrt{3}}{2}\right)^2\\
&= \frac{4-2\sqrt{3}}{4} + \frac{4+2\sqrt{3}}{4}\\
&= 2\\
\text{CP} &= \sqrt{2}
\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{CP} = \sqrt{2}}$$

d. Considérons le point C′, intersection du cercle de centre P et de rayon PC avec le segment [PA] ; on a : AC′ = AP − PC′ = AP − PC = $2-\sqrt{2}$ = AG ; donc C′ = G.

$$\boxed{\text{G est l'intersection du cercle de centre P et de rayon PC avec le segment [AP]}}$$

e. Voir la figure I.2 ci-dessous.

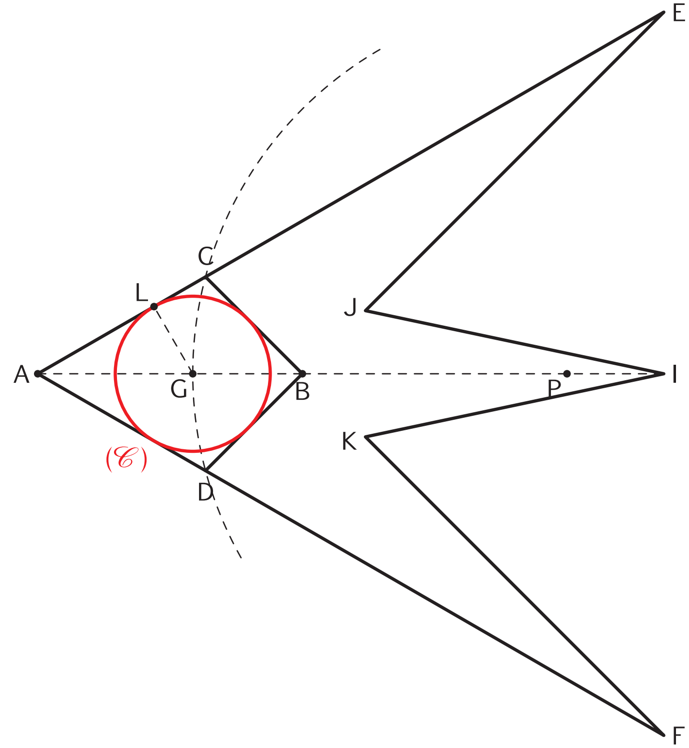


Figure I.2 : *Construction du point* G *et tracé du cercle* $\mathscr{C}$.

5. **a.** Le triangle CBE est un triangle rectangle en B. On sait (question 2b) que $BC = \dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}$; on sait également (question 3c) que $BE = \dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}$. Donc :

$$\begin{aligned}
CE^2 &= BC^2 + BE^2\\
&= \left(\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}\right)^2\\
&= \frac{8-2\sqrt{12}}{4} + \frac{8+2\sqrt{12}}{4}\\
&= 4\\
CE &= 2
\end{aligned}$$

L'aire $\mathscr{S}'$ est alors :

$$\begin{aligned}
\mathscr{S}' &= \frac{1}{2}\,\text{BC} \times \text{BE}\\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}\right)\left(\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}\right)\\
&= \frac{1}{2}\,\frac{6-2}{4}\\
&= \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

$$\boxed{\mathscr{S}' = \frac{1}{2}}$$

Le périmètre $\mathscr{P}'$ est alors :

$$\begin{aligned}
\mathscr{P}' &= \text{BC} + \text{CE} + \text{EB}\\
&= \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2} + 2 + \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}\\
&= \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}+4+\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}\\
&= \sqrt{6}+2
\end{aligned}$$

$$\boxed{\mathscr{P}' = 2+\sqrt{6}}$$

b. Alors :

$$R' = \frac{2\mathscr{S}'}{\mathscr{P}'} = \frac{2\,\frac{1}{2}}{2+\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{6}-2}{2}$$

$$\boxed{R' = \frac{\sqrt{6}-2}{2}}$$

c. On remarque que le cercle $\mathscr{C}$ est le cercle inscrit dans le triangle ADE ; donc son centre G est sur la bissectrice de l'angle $\widehat{\text{AEB}}$; mais G′ (centre du cercle $\mathscr{C}'$ se trouve également sur cette bissectrice. Donc G′ est sur la droite (EG).

D'autre part, G′ est sur la bissectrice de l'angle (angle droit) $\widehat{\text{CBE}}$; cette bissectrice est la perpendiculaire à la droite (AB) passant par B.

Donc G′ est le point d'intersection de ces deux droites.

Le centre G′ du cercle inscrit dans le triangle BCE est le point d'intersection de la droite (EG) et de la perpendiculaire à la droite (AB) passant par B

6.

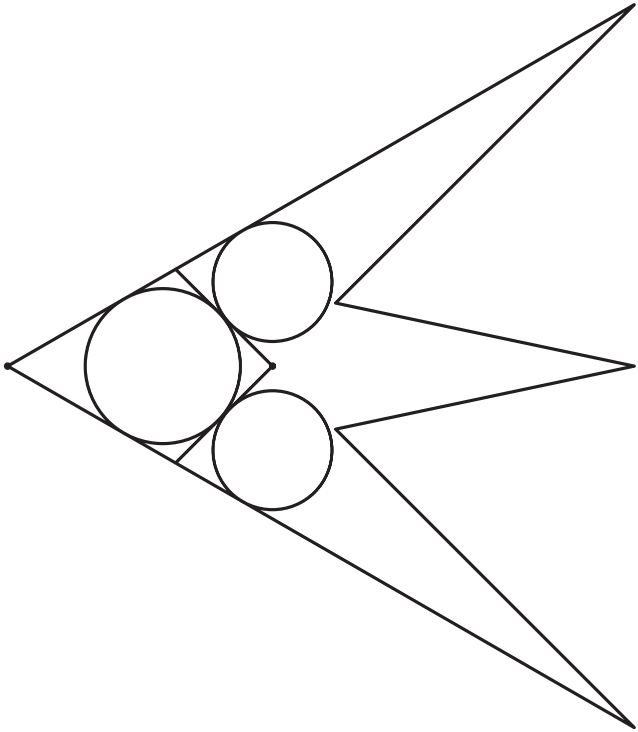


FIGURE I.3 : *Dessin complet.*

Corrigé de l'exercice 2

Première partie

1. **Avec $Q^{(0)} = (2,5,9,16)$:**

$$\boxed{\begin{array}{c} Q^{(1)} = (3,4,7,14),\quad Q^{(2)} = (1,3,7,11),\quad Q^{(3)} = (2,4,4,10),\quad Q^{(4)} = (2,0,6,8),\\ Q^{(5)} = (2,6,2,6),\quad Q^{(6)} = (4,4,4,4),\quad Q^{(7)} = (0,0,0,0).\end{array}}$$

Avec $Q^{(0)} = (1,2,2,5)$:

$$\boxed{Q^{(1)} = (1,0,3,4),\ Q^{(2)} = (1,3,1,3),\ Q^{(3)} = (2,2,2,2),\ Q^{(4)} = (0,0,0,0).}$$

2. Pour les questions 2a, 2b et 2c, on utilise l'exemple donné au début :

a.

$$\boxed{Q^{(0)} = (2,2,2,2)}$$

b.

$$\boxed{Q^{(0)} = (2,0,2,0)}$$

c.

$$\boxed{Q^{(0)} = (0,2,2,0)}$$

d. On essaie de trouver $Q^{(0)}$ tel que son quadruplet dérivé soit $(2,5,9,16)$, (donné en 1 et dont le temps de vol est égal à 7). Il vient assez rapidement :

$$\boxed{Q^{(0)} = (0,2,7,16)}$$

3.

$$\boxed{Q^{(1)} = (|a-b|, |b-c|, |c-d|, |d-a|)}$$

4. Si $(1,8,21,45)$ était le dérivé de (a,b,c,d), on devrait avoir $|a-b| = 1$, $|b-c| = 8$, $|c-d| = 21$ et $|d-a| = 45$. Or, $|d-a| \leqslant |d-c|+|c-a|$ et, puisque $|c-a| \leqslant |c-b+|b-a|$, il faudrait :

$$|d-a| \leqslant |d-c| + |c-b| + |b-a| = |c-d| + |b-c| + |a-b|$$

c'est-à-dire :

$$45 \leqslant 21 + 8 + 1 = 30$$

ce qui est bien évidemment faux.

$$\boxed{\text{Il n'existe pas de quadruplet dont } (1,8,21,45) \text{ soit le dérivé}}$$

5.

Temps de vol maximal et quadruplet associé

```
maxliste = 0
Pour i de 0 à n
  Pour j de i à n
    Pour k de i à n
      Pour l de 1 à n
        (a,b,c,d) = (i,j,k,l)
        maxtemp = 0
        Tant Que a + b + c + d > 0
          maxtemp = maxtemp + 1
          Si maxtemp > maxliste Alors
            maxliste = maxtemp
            (ares,bres,cres,dres) = (i,j,k,l)
          Fin Si
          (a,b,c,d) = (|a - b|,|b-c|,|c-d|,|d-a|)
        Fin Tant Que
      Fin Pour
    Fin Pour
  Fin Pour
Fin Pour
Afficher "Le temps de vol maximal est " maxliste
Afficher "Un quadruplet ayant ce temps de vol est " (ares,bres,cres,dres)
```

Remarque : on voit facilement que le temps de vol ne change pas si l'on effectue une permutation circulaire sur a, b, c, d ; on peut donc supposer que $a = \min\{a;b;c;d\}$.

Deuxième partie

1. a. On envisage les seize cas possibles pour $Q^{(i)}$, en notant P (resp. I) un entier pair (resp. impair) :

$Q^{(i)}$	$Q^{(i+1)}$	$Q^{(i+2)}$	$Q^{(i+3)}$	$Q^{(i+4)}$
(P,P,P,P)				
(P,P,P,I)	(P,P,I,I)	(P,I,P,I)	(I,I,I,I)	(P,P,P,P)
(P,P,I,P)	(P,I,I,P)	(I,P,I,P)	(I,I,I,I)	(P,P,P,P)
(P,I,P,P)	(I,I,P,P)	(P,I,P,I)	(I,I,I,I)	(P,P,P,P)
(I,P,P,P)	(I,P,P,I)	(I,P,I,P)	(I,I,I,I)	(P,P,P,P)
(P,P,I,I)	(P,I,P,I)	(I,I,I,I)	(P,P,P,P)	
(P,I,P,I)	(I,I,I,I)	(P,P,P,P)		
(I,P,P,I)	(I,P,I,P)	(I,I,I,I)	(P,P,P,P)	
(P,I,I,P)	(I,P,I,P)	(I,I,I,I)	(P,P,P,P)	
(I,P,I,P)	(I,I,I,I)	(P,P,P,P)		
(I,I,P,P)	(P,I,P,I)	(I,I,I,I)	(P,P,P,P)	
(P,I,I,I)	(I,P,P,I)	(I,P,I,P)	(I,I,I,I)	(P,P,P,P)
(I,P,I,I)	(I,I,P,P)	(P,I,P,I)	(I,I,I,I)	(P,P,P,P)
(I,I,P,I)	(P,I,I,P)	(I,P,I,P)	(I,I,I,I)	(P,P,P,P)
(I,I,I,P)	(P,P,I,I)	(P,I,P,I)	(I,I,I,I)	(P,P,P,P)
(I,I,I,I)	(P,P,P,P)			

L'un au moins des quadruplets $Q^{(i)}$, $Q^{(i+1)}$, $Q^{(i+2)}$, $Q^{(i+3)}$ ou $Q^{(i+4)}$ est composé de quatre entiers pairs

b. Il est immédiat de voir que, si le n-ième dérivé de $Q^{(0)} = (a, b, c, d)$ est le quadruplet (x, y, z, t), alors le n-ième dérivé de $(2a, 2b, 2c, 2d)$ est le quadruplet $(2x, 2y, 2z, 2t)$. Donc, si i est le temps de vol de $Q^{(0)}$, ceci signifie que tous les dérivés de $Q^{(0)}$ jusqu'à $i-1$ sont distincts de $(0, 0, 0, 0)$, donc tous les dérivés de $(2a, 2b, 2c, 2d)$ jusqu'à $i-1$ sont aussi distincts de $(0, 0, 0, 0)$; et le i-ème dérivé de $Q^{(0)}$ est égal à $(0, 0, 0, 0)$ donc il en est de même pour le i-ème dérivé de $(2a, 2b, 2c, 2d)$; ce qui signifie que le temps de vol de $(2a, 2b, 2c, 2d)$ est égal à i.

Remarque : la réciproque est immédiate : si $(2a, 2b, 2c, 2d)$ admet l'entier i comme temps de vol alors il en est de même pour (a, b, c, d).

$$\boxed{((a, b, c, d) \text{ a un temps de vol égal à } i) \Longleftrightarrow ((2a, 2b, 2c, 2d) \text{ a un temps de vol égal à } i)}$$

2.

a. Quels que soient les entiers naturels x et y, on a toujours

$$|x-y| = |y-x| \leqslant \max\{x ; y\}$$

puisque, si $0 \leqslant x \leqslant y$, alors $|x-y| = |y-x| = y-x \leqslant y = \max\{x ; y\}$ et, si $0 \leqslant y \leqslant x$, alors $|x-y| = |y-x| = x-y \leqslant x = \max\{x ; y\}$.

Donc, si $Q^{(i)} = (a_i, b_i, c_i, d_i)$, alors

$$|a_i - b_i| \leqslant \max\{a_i ; b_i\} \leqslant \max Q^{(i)}$$
$$|b_i - c_i| \leqslant \max\{b_i ; c_i\} \leqslant \max Q^{(i)}$$
$$|c_i - d_i| \leqslant \max\{c_i ; d_i\} \leqslant \max Q^{(i)}$$
$$|d_i - a_i| \leqslant \max\{d_i ; a_i\} \leqslant \max Q^{(i)}$$

Donc $\max Q^{(i+1)} = \max\{|a_i - b_i| ; |b_i - c_i| ; |c_i - d_i| ; |d_i - a_i|\} \leqslant \max Q^{(i)}$.

$$\boxed{\max Q^{(i+1)} \leqslant \max Q^{(i)}}$$

b. Non, on n'a pas toujours $\max Q^{(i+1)} < \max Q^{(i)}$; dans l'exemple donné au début, on a $Q^{(2)} = (2, 1, 0, 3)$ donc $\max Q^{(2)} = 3$ et $Q^{(3)} = (1, 1, 3, 1)$ donc $\max Q^{(3)} = 3$.

c. Notons $Q^{(0)} = (a, b, c, d)$ et $M_0 = \max Q^{(0)}$.

- si $M_0 = 0$: terminé, $Q^{(0)} = (0, 0, 0, 0)$.
- sinon : on sait (question 1a) que, dans les cinq quadruplets $Q^{(0)}$, $Q^{(1)}$, $Q^{(2)}$, $Q^{(3)}$, $Q^{(4)}$, il en existe au moins un dont les quatre termes sont tous pairs (on prend le premier ayant cette propriété), donc de la forme $(2a_1, 2b_1, 2c_1, 2d_1)$; on sait également, grâce à la question 2a, que $\max\{2a_1 ; 2b_1 ; 2c_1 ; 2c_1\} \leqslant M_0$.

  Enfin, la réponse à la question 1b prouve que l'on peut se ramener à regarder si le quadruplet (a_1, b_1, c_1, d_1) admet ou non un temps de vol.

Comme $\max\{a_1 ; b_1 ; c_1 ; d_1\} = \dfrac{\max\{2a_1 ; 2b_1 ; 2c_1 ; 2d_1\}}{2}$, il vient, en posant $M_1 = \max\{a_1 ; b_1 ; c_1 ; d_1\}$:

- si $M_1 = 0$: terminé, $(2a_1, 2b_1, 2c_1, 2d_1) = (0, 0, 0, 0)$.
- sinon : alors

$$0 < M_1 = \frac{\max\{2a_1 ; 2b_1 ; 2c_1 ; 2d_1\}}{2} < \max\{2a_1 ; 2b_1 ; 2c_1 ; 2d_1\} \leqslant M_0.$$

$$0 < M_1 < M_0.$$

  Puis on recommence en partant de (a_1, b_1, c_1, d_1) : il existe au moins un quadruplet parmi (a_1, b_1, c_1, d_1) et ses quatre dérivés suivants dont tous les termes sont pairs (on prend le premier vérifiant cette propriété), donc de la forme $(2a_2, 2b_2, 2c_2, 2d_2)$; on considère alors le quadruplet (a_2, b_2, c_2, d_2) et on pose $M_2 = \max\{a_2 ; b_2 ; c_2 ; d_2\}$. Si $M_2 = 0$, c'est terminé ; sinon, on a $0 < M_2 < M_1 < M_0$; etc.

On construit ainsi de proche en proche une suite (M_n) d'entiers naturels strictement décroissante. Cette suite est donc finie et il existe donc un rang p tel que $M_p = 0$; alors, le quadruplet correspondant est nécessairement $(0, 0, 0, 0)$.

On applique de nouveau le résultat de la question 1b et on en déduit que le nombre d'étapes effectuées pour obtenir ce quadruplet $(0, 0, 0, 0)$ est le même que le nombre d'étapes nécessaires, en partant du quadruplet initial, pour obtenir ce quadruplet $(0, 0, 0, 0)$.

Par exemple, prenons le quadruplet $(0, 7, 20, 44)$. Par le raisonnement que l'on vient d'effectuer, on obtient :

	Raisonnement ci-dessus				**Calcul classique**
Étape 0	$(0,7,20,44)$				$(0,7,20,44)$
Étape 1	$(7,13,24,44)$				$(7,13,24,44)$
Étape 2	$(6,11,20,37)$				$(6,11,20,37)$
Étape 3	$(5,9,17,31)$				$(5,9,17,31)$
Étape 4	$(4,8,14,26) \longrightarrow$	$(2,4,7,13)$			$(4,8,14,26)$
Étape 5		$(2,3,6,11)$			$(4,6,12,22)$
Étape 6		$(1,3,5,9)$			$(2,6,10,18)$
Étape 7		$(2,2,4,8) \longrightarrow$	$(1,1,2,4)$		$(4,4,8,16)$
Étape 8			$(0,1,2,3)$		$(0,4,8,12)$
Étape 9			$(1,1,1,3)$		$(4,4,4,12)$
Étape 10			$(0,0,2,2) \longrightarrow$	$(0,0,1,1)$	$(0,0,8,8)$
Étape 11				$(0,1,0,1)$	$(0,8,0,8)$
Étape 12				$(1,1,1,1)$	$(8,8,8,8)$
Étape 13				$(0,0,0,0)$	$(0,0,0,0)$

Troisième partie

1.

$$\boxed{\begin{array}{c} Q^{(0)} = (0,1,6,\pi)\,;\ Q^{(1)} = (1,5,6-\pi,\pi)\,;\ Q^{(2)} = (4,\pi-1,2\pi-6,\pi-1)\,; \\ Q^{(3)} = (5-\pi,5-\pi,5-\pi,5-\pi)\,;\ Q^{(4)} = (0,0,0,0). \end{array}}$$

2.

$Q^{(0)} = (1,q,q^2,q^3)$.

Puisque $1 < q$, on a : $1 < q < q^2 < q^3$ donc :

$$\begin{aligned} Q^{(1)} &= (q-1, q^2-q, q^3-q^2, q^3-1) \\ &= \big((q-1)1, (q-1)q, (q-1)q^2, (q-1)(q^2+q+1)\big); \end{aligned}$$

mais puisque $q^3-q^2-q-1=0$, on a : $q^2+q+1=q^3$, donc :

$$Q^{(1)} = \big((q-1)1, (q-1)q, (q-1)q^2, (q-1)q^3\big).$$

Pour tout i de $\mathbb{N}$, notons $Q^{(i)} = (a_i, b_i, c_i, d_i)$.

On a donc : $\left\{\begin{array}{l} a_0 = 1 \\ b_0 = q \\ c_0 = q^2 \\ d_0 = q^3 \end{array}\right.$ et $\left\{\begin{array}{lll} a_1 = & (q-1)1 & = (q-1)a_0 \\ b_1 = & (q-1)q & = (q-1)b_0 \\ c_1 = & (q-1)q^2 & = (q-1)c_0 \\ d_1 = & (q-1)q^3 & = (q-1)d_0 \end{array}\right.$.

Par une récurrence immédiate, on obtient :

$$\boxed{\text{Pour tout } i \text{ de } \mathbb{N},\ Q^{(i)} = \big((q-1)^i1, (q-1)^iq, (q-1)^iq^2, (q-1)^iq^3\big)}$$

Ceci montre bien qu'on ne peut jamais avoir $Q^{(i)} = (0,0,0,0)$.
Mais, puisque $1 < q < 2$, alors $0 < q-1 < 1$ donc (limite d'une suite géométrique de raison strictement comprise entre 0 et 1) :

- $\lim\limits_{i\to+\infty} a_i = \lim\limits_{i\to+\infty} (q-1)^i1 = 0\,;$
- $\lim\limits_{i\to+\infty} b_i = \lim\limits_{i\to+\infty} (q-1)^iq = 0\,;$
- $\lim\limits_{i\to+\infty} c_i = \lim\limits_{i\to+\infty} (q-1)^iq^2 = 0\,;$
- $\lim\limits_{i\to+\infty} d_i = \lim\limits_{i\to+\infty} (q-1)^iq^3 = 0.$

Partie A. Généralités

1. **a.** Un nombre palindrome à 2 chiffres est un nombre de la forme aa où a est un chiffre compris entre 1 et 9; il existe donc neuf nombres palindromes à 2 chiffres.

   Il existe neuf nombres palindromes à 2 chiffres :
   11, 22, 33, 44, 55, 66, 77, 88 et 99

   b. Un nombre palindrome à 3 chiffres est un nombre de la forme aba où a est un chiffre compris entre 1 et 9 et b un chiffre compris entre 0 et 9; il existe donc quatre-vingt-dix nombres palindromes à 3 chiffres.

   Il existe quatre-vingt-dix nombres palindromes à 3 chiffres :
   101, 111, 121, 131, 141, 151, 161, 171, 181, 191,
   202, 212, 222, 232, 242, 252, 262, 272, 282, 292,
   303, 313, 323, 333, 343, 353, 363, 373, 383, 393,
   404, 414, 424, 434, 444, 454, 464, 474, 484, 494,
   505, 515, 525, 535, 545, 555, 565, 575, 585, 595,
   606, 616, 626, 636, 646, 656, 666, 676, 686, 696,
   707, 717, 727, 737, 747, 757, 767, 777, 787, 797,
   808, 818, 828, 838, 848, 858, 868, 878, 888, 898,
   909, 919, 929, 939, 949, 959, 969, 979, 989 et 999

   c. Un nombre palindrome à 241 chiffres est un nombre de la forme

$$a_0a_1\ldots a_{119}ba_{119}\ldots a_1a_0$$

   où :

   - a_0 est un chiffre compris entre 1 et 9,
   - a_i est un chiffre compris entre 0 et 9 pour i entier naturel compris entre 1 et 119,
   - b est un chiffre compris entre 0 et 9;

   il existe donc $9\times10^{119}\times10 = 9\times10^{120}$ nombres palindromes à 241 chiffres.

   Il existe 9×10^{120} nombres palindromes à 241 chiffres

2. **a.**

   10 000 000 001 et 12 345 654 321 sont des nombres palindromes à 11 chiffres

   b.

   100 000 000 001 et 123 456 654 321 sont des nombres palindromes à 12 chiffres

3.

Un nombre de 4 chiffres est-il un nombre palindrome ?

```
Entrer n
a = E(n/1000)
Si a <> 0
  b = E((n - 1000 * a) / 100)
  c = E((n - 1000 * a - 100 * b) / 10)
  Si b = c
    d = n - 1000 * a - 100 * b - 10 * c
    Si d = a
      Afficher "n est un nombre palindrome"
    Sinon
      Afficher "n n'est pas un nombre palindrome"
    Fin Si
  Sinon
    Afficher "n n'est pas un nombre palindrome"
  Fin Si
Sinon
  Afficher "n n'est pas un nombre à 4 chiffres"
Fin Si
```

a. L'écart cherché est :

$$\boxed{e = 12\,345\,654\,321 - 10\,000\,000\,001 = 2\,345\,654\,320}$$

b.

$$\boxed{1\,991 \text{ et } 2\,002 \text{ conviennent}}$$

c. Posons $x = abba$ et $y = cddc$ où a et c sont des entiers compris entre 1 et 9 et où bb et d sont des entiers compris entre 0 et 9. x et y sont deux nombres palindromes que l'on suppose distincts.
On peut supposer, sans restreindre la généralité, que $y > x$, donc que $c \geqslant a$.

$$\begin{aligned} x =& 1\,000a + 100b + 10b + a = 1\,001a + 110b \\ y =& 1\,000c + 100d + 10d + c = 1\,001c + 110d \\ y - x =& (1\,001c + 110d) - (1\,001a + 110b) \\ =& 1\,001(c-a) + 110(d-b) \end{aligned}$$

Si $c = a$: alors $y - x = 110(d-b)$; puisque $y > x$, on a nécessairement $d > b$, donc $d - b > 0$ et comme b et d sont des entiers, $d - b \geqslant 1$ donc $y - x \geqslant 110$;

Si $c > a$: $c - a > 0$ avec a et c entiers, donc $1 \leqslant c - a$, donc

$$1\,001 \leqslant 1\,001(c-a).$$

b et d sont des entiers compris entre 0 et 9 donc $-9 \leqslant d - b \leqslant 9$, donc

$$-990 \leqslant 110(d-b) \leqslant 990.$$

On obtient donc :

$$1\,001 - 990 \leqslant 1\,001(c-a) + 110(d-b)$$

c'est-à-dire $11 \leqslant y - x$.

La question précédente 3b montre que l'on peut trouver effectivement deux nombres palindromes distincts de 4 chiffres dont l'écart est égal à 11.

L'écart minimal entre deux nombres palindromes distincts à 4 chiffres est égal à 11

Remarque : cet écart de 11 (pour des nombres palindromes distincts à 4 chiffres) n'est atteint que pour les couples :

$(1\,991;2\,002)$, $(2\,992;3\,003)$, $(3\,993;4\,004)$, $(4\,994;5\,005)$, $(5\,995;6\,006)$, $(6\,996;7\,007)$, $(7\,997;8\,008)$, $(8\,998;9\,009)$.

Partie B. Nombres palindromes et divisibilité par 11

1. a.

$$\begin{aligned}123\,321 &= 100\,001 + 23\,320\\ &= 1\times 100\,001 + 10\times 2\,332\\ &= 1\times 100\,001 + 10\times(2\,002+330)\\ &= 1\times 100\,001 + 10\times(2\times 1\,001 + 30\times 11)\\ &= 1\times 100\,001 + 20\times 1\,001 + 300\times 11\end{aligned}$$

$$\boxed{123\,321 = 300\times 11 + 20\times 1\,001 + 1\times 100\,001}$$

Remarque : une telle écriture n'est pas unique ; par exemple, on a aussi :

$$\begin{aligned}&123\,321 = 1\,210\times 11 + 10\times 1\,001 + 1\times 100\,001\\ \text{ou } &123\,321 = 11\,211\times 11 + 0\times 1\,001 + 0\times 100\,001.\end{aligned}$$

b.

$$\boxed{123\,321 = 11\times 11\,211}$$

2. a.

Appliquons le résultat admis avec $x = -10$ et $n = 2k+1$ (k étant un entier naturel, alors n est un entier naturel non nul). Il vient :

$$\begin{aligned}1-(-10)^{2k+1} &= \big(1-(-10)\big)\Big(1+(-10)+(-10)^2+\cdots+(-10)^{2k}\Big)\\ &= 11\Big(1-10+10-1\,000+\cdots+10^{2k}\Big)\end{aligned}$$

Or, $1-(-10)^{2k+1} = 1+(-1)^{2k+1}10^{2k+1} = 1-(-1)10^{2k+1} = 1+10^{2k+1} = N_k$.
Ceci prouve bien que :

$$\boxed{N_k \text{ est divisible par } 11}$$

b. Soit N un nombre palindrome ayant un nombre p pair de chiffres.

Si $p = 2$: d'après le résultat de la question 1a, il est immédiat de constater que N est divisible par 11.

Si $p = 4$: le résultat de la question 2a montre que N est divisible par 11.

Si $p \geqslant 6$: posons $p = 2\ell + 2$ avec ℓ entier naturel (supérieur ou égal à 2).
On écrit alors : $N = \underbrace{a_0a_1\ldots a_{\ell-1}a_\ell}_{\ell+1 \text{ chiffres}}\underbrace{a_\ell a_{\ell-1}\ldots a_1a_0}_{\ell+1 \text{ chiffres}}$ et on obtient :

$$\begin{aligned}
N &= a_0 10^{2\ell+1} + a_1 10^{2\ell} + \cdots + a_{\ell-1}10^{\ell+2} + a_\ell 10^{\ell+1} + \\
&\qquad a_\ell 10^\ell + a_{\ell-1}10^{\ell-1} + \cdots + a_1 10^1 + a_0 10^0 \\
&= a_0\left(10^{2\ell+1}+1\right) + a_1\left(10^{2\ell}+10\right) + \cdots + a_{\ell-1}\left(10^{\ell+2}+10^{\ell-1}\right) + \\
&\qquad a_\ell\left(10^{\ell+1}+10^\ell\right) \\
&= \sum_{j=0}^{\ell} a_j 10^j\left(10^{2\ell+1-2j}+1\right) \\
&= \sum_{k=0}^{\ell} a_{\ell-k}10^{\ell-k}\underbrace{\left(10^{2k+1}+1\right)}_{\text{divisible par } 11}
\end{aligned}$$

On en déduit [1] que N est divisible par 11.

$$\boxed{\begin{array}{c}\text{Si } N \text{ est un nombre palindrome avec un nombre pair de chiffres,}\\ \text{alors } N \text{ est divisible par } 11\end{array}}$$

c. **Pour $N = 121$:** N est divisible par 11 ($N = 11 \times 11$), c'est un nombre palindrome mais il n'a pas un nombre pair de chiffres ;

Pour $N = 1\,826$: N est divisible par 11 ($N = 11 \times 166$), il a un nombre pair de chiffres, mais ce n'est pas un nombre palindrome ;

Pour $N = 143$: N est divisible par 11 ($N = 11 \times 13$), mais ce n'est pas un nombre palindrome et il n'a pas un nombre pair de chiffres.

$$\boxed{\text{La réciproque de la propriété énoncée à la question 2b est fausse}}$$

1. Ce résultat est quasi immédiat si l'on connaît le critère de divisibilité par 11 : « *Un nombre est divisible par 11 si et seulement si la somme de ses chiffres de rang pair soustraite de la somme de ses chiffres de rang impair est nulle ou un multiple de 11* ».