

1 Problème 1 : Le début justifie la fin

Dans cet exercice, on considère l'ensemble, noté \mathcal{S} , des suites $(u_n)_{n \geq 0}$ à valeurs réelles et telles que

$$u_{n+1} = \frac{\exp(u_n)}{n+1}$$

pour tout entier $n \geq 0$.

Pour tout nombre réel x , on note $u(x)$ la suite appartenant à \mathcal{S} et dont le premier terme vaut x . On note également $u_n(x)$ le terme d'indice n de cette suite. Ainsi, $u_0(x) = x$ et $u_1(x) = \exp(x)$.

- Démontrer que toute suite appartenant à \mathcal{S} est strictement positive à partir du rang 1.
- Soit $(u_n)_{n \geq 0}$ une suite appartenant à \mathcal{S} . Démontrer que, s'il existe un rang $N \geq 2$ pour lequel $u_N \leq 1$, alors $(u_n)_{n \geq 0}$ converge vers 0.
- Soit $(u_n)_{n \geq 0}$ une suite appartenant à \mathcal{S} . Démontrer que, si cette suite ne converge pas vers 0, alors elle diverge vers $+\infty$.

Ci-dessous, on note E_0 l'ensemble des réels x pour lesquels la suite $u(x)$ converge vers 0, et E_∞ l'ensemble des réels x pour lesquels $u(x)$ diverge vers $+\infty$.

- Démontrer que $0 \in E_0$.
- a. Démontrer, pour tout entier $n \geq 0$, que la fonction $x \mapsto u_n(x)$ est strictement croissante sur \mathbb{R} .
b. En déduire que, si x est un élément de E_0 , alors l'intervalle $] -\infty, x]$ est inclus dans E_0 .
- a. Démontrer que la fonction $x \mapsto \exp(x) - x(x+1)$ est strictement positive sur l'intervalle $[2, +\infty[$.
b. Soit $(u_n)_{n \geq 0}$ une suite appartenant à \mathcal{S} . Démontrer que, s'il existe un rang $N \geq 1$ pour lequel $u_N \geq N+1$, alors $(u_n)_{n \geq 0}$ diverge vers $+\infty$.
c. Démontrer que $1 \in E_\infty$.
- Démontrer que, si x est un élément de E_∞ , alors l'intervalle $[x, +\infty[$ est inclus dans E_∞ .

Nous allons maintenant démontrer qu'il existe un nombre réel δ tel que l'intervalle $] -\infty, \delta[$ est inclus dans E_0 et l'intervalle $[\delta, +\infty[$ est inclus dans E_∞ .

- On définit deux suites $(a_n)_{n \geq 0}$ et $(b_n)_{n \geq 0}$ de la façon suivante.
Tout d'abord, on pose $a_0 = 0$ et $b_0 = 1$.
Puis, pour tout entier $n \geq 0$, on pose $a_{n+1} = (a_n + b_n)/2$ et $b_{n+1} = b_n$ si $(a_n + b_n)/2 \in E_0$, et on pose $a_{n+1} = a_n$ et $b_{n+1} = (a_n + b_n)/2$ sinon.
a. Démontrer que les suites $(a_n)_{n \geq 0}$ et $(b_n)_{n \geq 0}$ sont convergentes et ont même limite.
b. Soit δ la limite commune aux suites $(a_n)_{n \geq 0}$ et $(b_n)_{n \geq 0}$. Démontrer que l'intervalle $] -\infty, \delta[$ est inclus dans E_0 et l'intervalle $[\delta, +\infty[$ est inclus dans E_∞ .

- On pose $c_2 = \ln(\ln(2))$, $c_3 = \ln(\ln(2\ln(3)))$ et $c_4 = \ln(\ln(2\ln(3\ln(4))))$, et plus généralement, pour tout entier $\ell \geq 2$, $c_\ell = \ln(\ln(2\ln(3\ln(\dots \ln((\ell-1)\ln(\ell)) \dots)))$.
Démontrer que, pour tout entier $\ell \geq 2$, le nombre réel c_ℓ appartient à E_0 .
- Démontrer que la suite $(c_\ell)_{\ell \geq 2}$ converge.
- Démontrer que $\delta \in E_\infty$.

2 Problème 2 : La loi du milieu

Soit n un entier naturel non nul. Dans un sac, on place $2n+1$ boules indiscernables au toucher et numérotées $0, 1, 2, \dots, 2n$. On vide alors progressivement le sac jusqu'à n'y laisser qu'une seule boule, selon le protocole suivant :

- on tire trois boules simultanément;
- si les trois boules tirées ont pour numéros a, b et c , avec $a < b < c$, on élimine les boules de numéros a et c et on replace dans le sac la boule de numéro b ;
- on recommence les opérations précédentes.

Au bout de n tirages, il ne reste plus qu'une seule boule, et on note D_n son numéro. Pour tout entier k , on note $\mathbb{P}[D_n = k]$ la probabilité que la dernière boule restant dans le sac soit celle de numéro k .

2.1 Étude des petits cas

- Déterminer la loi de la variable aléatoire D_1 .
- Déterminer la loi de la variable aléatoire D_2 .

2.2 Valeurs extrêmes et symétrie

- Déterminer la probabilité $\mathbb{P}[D_n = 0]$.
- Déterminer la probabilité $\mathbb{P}[D_n = 1]$ en fonction de n .
- Soit i un entier tel que $0 \leq i \leq 2n$. Pourquoi a-t-on $\mathbb{P}[D_n = i] = \mathbb{P}[D_n = 2n - i]$?
- Calculer l'espérance de la variable aléatoire D_n en fonction de n .

2.3 Comportement limite

Dans cette partie, on souhaite étudier la loi de D_n lorsque n tend vers $+\infty$. Afin de faciliter cette étude, on démontre tout d'abord un résultat préliminaire.

- On considère la suite $(u_n)_{n \geq 0}$ définie par $u_0 = 1$ et par

$$u_n = \frac{1}{2} \times \frac{3}{4} \times \frac{5}{6} \times \dots \times \frac{2n-1}{2n}$$

pour tout $n \geq 1$. Démontrer que $u_n \leq \frac{1}{\sqrt{3n+1}}$ pour tout $n \geq 0$.

Il est maintenant temps d'étudier la loi de D_n elle-même.

8. Déterminer, pour tout entier j tel que $0 \leq j \leq 2n$, la probabilité p_j que la boule de numéro j soit éliminée lors de la première sélection.
9. Démontrer que, si $n \geq 3$, alors $p_j \geq \frac{1}{2n}$ pour tout entier j tel que $0 \leq j \leq 2n$.
10. On note M_n la plus grande des probabilités $\mathbb{P}[D_n = j]$ lorsque $0 \leq j \leq 2n$. Démontrer que M_n tend vers 0 lorsque n tend vers $+\infty$.

2.4 Résultat le plus probable

On rappelle que, pour deux événements A et B , on note $A \setminus B$ l'événement selon lequel A est réalisé, mais pas B . En outre, si $\mathbb{P}[B] \neq 0$, on note $\mathbb{P}_B[A]$ la probabilité conditionnelle de A sachant B .

On souhaite ici démontrer, pour tout entier $n \geq 1$, que $\mathbb{P}[D_n = n] = M_n$. Dans ce but, on va démontrer la propriété \mathcal{P}_n suivante :

Pour tout entier k tel que $0 \leq k \leq n-1$, on a $\mathbb{P}[D_n = k] \leq \mathbb{P}[D_n = k+1]$.

11. Démontrer que, si \mathcal{P}_n est vraie, alors $\mathbb{P}[D_n = n] = M_n$.

12. Démontrer \mathcal{P}_1 .

On suppose maintenant que l'on dispose d'un entier $n \geq 2$ tel que \mathcal{P}_{n-1} est vraie et d'un entier k tel que $0 \leq k \leq n-1$.

13. Pour tout entier ℓ compris entre 0 et $2n$, distinct de k et de $k+1$, on note X_ℓ l'événement selon lequel les trois boules de numéros $k, k+1$ et ℓ sont choisies dès la première sélection.

- a. Pourquoi, si $\ell > k+1$, a-t-on $\mathbb{P}_{X_\ell}[D_n = k] = 0$ et $\mathbb{P}_{X_\ell}[D_n = k+1] = \mathbb{P}[D_{n-1} = k]$?
- b. Donner des résultats analogues sur $\mathbb{P}_{X_\ell}[D_n = k]$ et $\mathbb{P}_{X_\ell}[D_n = k+1]$ lorsque $\ell < k$.
- c. On note maintenant X l'événement selon lequel les deux boules de numéros k et $k+1$ sont choisies dès la première sélection. Démontrer que $\mathbb{P}_X[D_n = k] \leq \mathbb{P}_X[D_n = k+1]$.

14. Soit Y l'événement selon lequel l'une des boules de numéros k et $k+1$ est éliminée lors de la première sélection.

- a. Démontrer que $\mathbb{P}_{Y \setminus X}[D_n = k] = \mathbb{P}_{Y \setminus X}[D_n = k+1]$.
- b. En déduire que $\mathbb{P}_Y[D_n = k] \leq \mathbb{P}_Y[D_n = k+1]$.

15. Soient a, b et c les numéros des trois boules choisies lors de la première sélection, avec $a < b < c$.

- a. Soit G l'événement selon lequel $c < k$. Démontrer que $\mathbb{P}_G[D_n = k] \leq \mathbb{P}_G[D_n = k+1]$.
- b. Soit H l'événement selon lequel $a < k$ et $k+1 < c$. Démontrer que $\mathbb{P}_H[D_n = k] \leq \mathbb{P}_H[D_n = k+1]$.
- c. Soit I l'événement selon lequel $k+1 < a$. Démontrer que, si $k \leq n-2$, alors :

$$\mathbb{P}_I[D_n = k] \leq \mathbb{P}_I[D_n = k+1]$$

16. Démontrer que, si $k \leq n-2$, alors $\mathbb{P}[D_n = k] \leq \mathbb{P}[D_n = k+1]$.

17. Démontrer \mathcal{P}_n .

3 Problème 3 : Que la force soit avec f !

Dans tout le problème, k désigne un entier naturel non nul, I un intervalle ouvert de $]0, +\infty[$, et f une fonction définie sur I et à valeurs strictement positives.

On dit que la fonction f est « k -forte » si, pour tous les réels x et y appartenant à I ,

$$\left(y^k f(y) - x^k f(x)\right) \left(\frac{f(y)}{y^k} - \frac{f(x)}{x^k}\right) \geq 0$$

On dit que f est « k -faible » si, pour tous les réels x et y appartenant à I ,

$$\left(y^k f(y) - x^k f(x)\right) \left(\frac{f(y)}{y^k} - \frac{f(x)}{x^k}\right) \leq 0$$

3.1 Quelques exemples et propriétés

1. Démontrer que la fonction f_1 définie sur l'intervalle $]0, +\infty[$ par $f_1(x) = x^2$ est 1-forte et 3-faible.
2. Démontrer que la fonction f_2 définie sur l'intervalle $]0, 1[$ par $f_2(x) = \exp(x)$ est 1-faible mais pas 1-forte.
3. Démontrer que la fonction f_3 définie sur l'intervalle $]1, +\infty[$ par $f_3(x) = \exp(x)$ est 1-forte mais pas 1-faible.
4. Démontrer que la fonction f_4 définie sur l'intervalle $0, +\infty[$ par $f_4(x) = \frac{1}{x}$ est k -faible pour tout entier $k \geq 1$.
5. Existe-t-il une fonction définie sur l'intervalle $]0, +\infty[$ qui soit k -forte pour tout entier $k \geq 1$?

3.2 Quelques critères de force et de faiblesse

6. Démontrer que f est k -forte si et seulement si

$$\frac{x^k}{y^k} + \frac{y^k}{x^k} \leq \frac{f(x)}{f(y)} + \frac{f(y)}{f(x)}$$

pour tous les réels x et y appartenant à I , et que f est k -faible si et seulement si

$$\frac{x^k}{y^k} + \frac{y^k}{x^k} \geq \frac{f(x)}{f(y)} + \frac{f(y)}{f(x)}$$

pour tous les réels x et y appartenant à I .

7. Démontrer que f est k -forte si et seulement si

$$\frac{\max(x^k, y^k)}{\min(x^k, y^k)} \leq \frac{\max(f(x), f(y))}{\min(f(x), f(y))}$$

pour tous les réels x et y appartenant à I , et que f est k -faible si et seulement si

$$\frac{\max(x^k, y^k)}{\min(x^k, y^k)} \geq \frac{\max(f(x), f(y))}{\min(f(x), f(y))}$$

pour tous les réels x et y appartenant à I .

8. On note g_k et h_k les fonctions définies sur I par :

$$g_k(x) = x^k f(x) \quad \text{et} \quad h_k(x) = \frac{f(x)}{x^k}$$

- a. Démontrer que, si g_k et h_k sont monotones, alors f est k -forte ou k -faible.
- b. Démontrer que, si f est k -faible, alors g_k et h_k sont monotones.
- c. Soit f la fonction définie sur l'intervalle $I =]0, +\infty[$ par

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{si } 0 < x < 1 \\ 4 & \text{si } x = 1 \\ x & \text{si } 1 < x < 2 \\ 4x & \text{si } 2 \leq x \end{cases}$$

Démontrer que f est 1-forte mais que les fonctions g_1 et h_1 ne sont pas monotones.

9. On suppose dans cette question que f est dérivable sur I et que sa dérivée f' est continue sur I .

- a. Démontrer que, si $|f'(x)| \geq k \frac{f(x)}{x}$ pour tout réel $x \in I$, alors f est k -forte.
- b. Démontrer que, si $|f'(x)| \leq k \frac{f(x)}{x}$ pour tout réel $x \in I$, alors f est k -faible.
- c. Démontrer que les réciproques aux questions **9.a.** et **9.b.** sont vraies.

3.3 Une multitude de fonctions fortes et faibles

On dit que la fonction f est « forte » s'il existe un entier $k \geq 1$ pour lequel f est k -forte, et que f est « faible » s'il existe un entier $k \geq 1$ pour lequel f est k -faible.

- 10. Démontrer que, si f est faible, la fonction F définie sur I par $F(x) = \frac{1}{f(x)}$ est faible.
- 11. Démontrer que, si deux fonctions f et g définies sur I sont faibles, les fonctions $f + g$, $f \times g$ et $\frac{f}{g}$ sont faibles.
- 12. Démontrer à l'aide de contre-exemples que, si deux fonctions f et g définies sur I sont fortes, les fonctions $f + g$, $f \times g$ et $\frac{f}{g}$ ne sont pas nécessairement fortes.
- 13. Soit f une fonction définie sur I et à valeurs strictement positives, et g une fonction définie sur $]0, +\infty[$.
 - a. Démontrer que, si f et g sont faibles, la fonction $g \circ f$ est faible.
 - b. Démontrer que, si f et g sont fortes, la fonction $g \circ f$ est forte.

3.4 Application à la démonstration d'inégalités

14. Soit a, b et c trois réels strictement positifs, et n un entier naturel non nul. Démontrer que :

$$\left(\frac{a+c}{b+c}\right)^n + \left(\frac{b+c}{a+c}\right)^n \leq \left(\frac{a}{b}\right)^n + \left(\frac{b}{a}\right)^n$$

15. Dans cette question, on pourra utiliser le fait que les fonctions \cos et \sin sont dérivables sur $]0, \frac{\pi}{2}[$ de dérivées respectivement $\cos' = -\sin$ et $\sin' = \cos$.

La fonction \tan est définie sur $]0, \frac{\pi}{2}[$ par $\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$.

Soient a et b deux nombres réels de l'intervalle $]0, \frac{\pi}{2}[$, démontrer que :

$$\frac{\sin(a)}{\sin(b)} + \frac{\sin(b)}{\sin(a)} \leq \frac{a}{b} + \frac{b}{a} \leq \frac{\tan(a)}{\tan(b)} + \frac{\tan(b)}{\tan(a)}$$