

1 Problème 1 : Analyse

Le but de l'exercice est la recherche des fonctions f définies sur \mathbb{R} , à valeurs dans l'intervalle $[-1, 1]$, vérifiant pour tout réel x la relation $f(2x) = 2f(x)^2 - 1$, telles que $f(0) = 1$ et que $\frac{1-f(x)}{x^2}$ admette une limite lorsque x tend vers 0, que l'on notera a .

On rappelle que tout x de $[-1, 1]$ s'écrit de façon unique $x = \cos(\theta)$ avec θ dans $[0, \pi]$.

1. a. Vérifier $\lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{1-\cos(\theta)}{\theta^2} = \frac{1}{2}$. (On pourra utiliser une formule donnant $\cos(2\alpha)$).
- b. Montrer, pour θ dans $[0, \frac{\pi}{2}]$, les relations : $\frac{2\theta}{\pi} \leq \sin(\theta)$ et $\cos(\theta) \leq 1 - \frac{\theta^2}{\pi}$.
2. Soit f une fonction solution du problème. On se donne un réel x et l'on pose, pour tout entier naturel n , $f(\frac{x}{2^n}) = \cos(\theta_n)$, avec θ_n dans $[0, \pi]$.
 - a. Montrer que f est continue en 0 et que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \theta_n = 0$.
 - b. Vérifier l'existence d'un entier N tel que pour $n \geq N$ on ait $\theta_{n+1} = \frac{\theta_n}{2}$.
 - c. Établir que a est positif et que $f(x) = \cos(x\sqrt{2a})$.

2 Problème 2 : Probabilités

Je joue avec 4 dés à 20 faces. Chacun de ces dés, dont la forme est un icosaèdre, a ses faces numérotées de 1 à 20. Lorsqu'on le lance, chaque face apparaît sur le dessus avec la même probabilité de $\frac{1}{20}$.

Lorsque, parmi les 4 dés, une face apparaît au moins deux fois, je marque le nombre de points correspondant à cette face. Ainsi :

- avec la combinaison 3 – 4 – 12 – 16, je ne marque rien ;
- avec la combinaison 2 – 8 – 11 – 11, je marque 11 points ;
- avec la combinaison 4 – 9 – 9 – 9, je marque 9 points ;
- avec la combinaison 7 – 7 – 14 – 14, je marque 21 points ;
- avec la combinaison 2 – 2 – 2 – 2, je marque 2 points.

1. Quelle est la probabilité que je ne marque rien ?
2. Soit a compris entre 1 et 20. Déterminer pour tout $k \leq 4$ la probabilité d'avoir exactement k nombres a parmi les dés lancés.
3. Pour tout a on note X_a la variable aléatoire qui vaut 1 s'il y a au moins deux dés égaux à a parmi les quatre du lancer, et à 0 sinon.
Préciser la loi de X_a et exprimer le gain G à l'aide de ces variables.
Combien de points puis-je espérer en moyenne ?
4. Quelle est la probabilité que je marque exactement 8 points ?

On suppose à partir de maintenant qu'après avoir lancé les 4 dés, je sois autorisé à relancer entre 0 et 4 dés pour améliorer mon score.

5. J'ai obtenu 11 – 7 – 2 – 2. J'hésite entre tout relancer, garder le 11, et garder les deux 2. Que dois-je faire ?
6. On suppose que j'ai obtenu 4 dés différents $a_1 > a_2 > a_3 > a_4$. Quels dés dois-je relancer ?

3 Problème 3 : Arithmétique

Étant donné deux entiers a et b , on désigne par $\llbracket a, b \rrbracket$ l'ensemble des nombres entiers compris au sens large entre a et b .

On considère une suite finie à n termes $U = (u_1, u_2, \dots, u_n)$.

On dit qu'un entier strictement positif p est une *période* de U si l'on a $u_i = u_{i+p}$ pour tout entier i tel que $1 \leq i \leq n - p$. Une suite peut avoir plusieurs périodes.

1. On considère deux entiers strictement positifs a et b premiers entre eux.
 - a. On définit r_k comme le reste de la division de ka par $a + b$. Montrer que lorsque k varie dans $\llbracket 1, a + b - 1 \rrbracket$, r_k prend toutes les valeurs de $\llbracket 1, a + b - 1 \rrbracket$.
 - b. En déduire que si a et b sont périodes de U et si $n \geq a + b - 1$ alors U est constante.
2. On suppose à présent que a et b sont des entiers strictement positifs de PGCD d . Montrer que si U est périodique de périodes a et b et si $n \geq a + b - d$, alors U est de période d .
3. On considère deux entiers a et b strictement supérieurs à 1 et premiers entre eux.
 - a. Montrer que l'on peut partager l'intervalle $\llbracket 1, a + b - 2 \rrbracket$ en deux sous-ensembles non vides A et B de manière que la suite V égale à 1 sur A et à 0 sur B soit de périodes a et b .
 - b. Le partage obtenu à la question précédente est-il unique ? Montrer que, pour tout x de A , $a + b - 1 - x$ est dans A . Quelle propriété de la suite V traduit-on ainsi ?