

CONCOURS GÉNÉRAL DES LYCÉES - SESSION 2002

Dans tout le problème, un triangle ABC est la figure déterminée par les trois points A, B, C supposés non alignés. Conformément à la tradition, les longueurs de ses côtés seront notées $a = BC, b = CA$ et $c = AB$, et \hat{A}, \hat{B} et \hat{C} sont les mesures en radians, comprises entre 0 et π , de ses angles.

Les trois premières parties se déroulent dans le plan rapporté à un repère orthonormé direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$ associé aux coordonnées (x, y) (ou (X, Y)).

1 Première partie

Soit ABC un triangle. On note P le projeté orthogonal du point A sur la droite (BC) et D le symétrique du point C par rapport à la droite (AP) .

On dit que ce triangle est *pseudo-rectangle* en A si $|\hat{B} - \hat{C}| = \frac{\pi}{2}$.

On précise qu'il est *pseudo-rectangle* en A , *obtus* en B dans le cas où $\hat{B} - \hat{C} = \frac{\pi}{2}$.

1. Montrer que le triangle ABC est pseudo-rectangle en A si et seulement si le triangle ABD est rectangle en A .
2. Montrer que $PA^2 = PB \cdot PC$ si et seulement si le triangle ABC est rectangle en A ou pseudo-rectangle en A .
3. Montrer que le triangle ABC est pseudo-rectangle en A si et seulement si son orthocentre est le symétrique du point A par rapport à la droite (BC) .
4. Soit R le rayon du cercle circonscrit au triangle ABC . Montrer que $PB + PC = 2R$ si et seulement si ABC est rectangle en A ou pseudo-rectangle en A .
5. Montrer que le triangle ABC est pseudo-rectangle en A si et seulement si la droite (AP) est tangente au cercle circonscrit au triangle ABC .
6. Dans le plan complexe associé au repère orthonormé direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$, on note α, β, γ les affixes des points non alignés A, B, C .
 - a. Donner une condition nécessaire et suffisante sur $\frac{(\alpha-\beta)(\alpha-\gamma)}{(\beta-\gamma)^2}$ pour que le triangle ABC soit pseudo-rectangle en A .
 - b. On suppose $\beta = -\gamma = e^{i\frac{\pi}{4}}$. Déterminer l'ensemble (E_1) des points A du plan tels que le triangle ABC soit pseudo-rectangle en A .
 - c. On suppose $\beta = -\gamma = 1$. Déterminer l'ensemble (E_2) des points A du plan tels que le triangle ABC soit pseudo-rectangle en A .
 - d. Par quelle transformation géométrique simple passe-t-on de (E_2) à (E_1) ?

2 Deuxième partie

1. Soit (a, b, c) un triplet de réels strictement positifs. Établir l'équivalence des conditions suivantes :
 - i. il existe un triangle ABC pseudo-rectangle en A et obtus en B tel que $AB = c, BC = a$ et $CA = b$;
 - ii. $b^2 - c^2 = a\sqrt{b^2 + c^2}$;
 - iii. il existe deux réels ρ et θ vérifiant $\rho > 0, 0 < \theta < \frac{\pi}{4}$ et $a = \rho \cos 2\theta, b = \rho \cos \theta$ et $c = \rho \sin \theta$.

Ces conditions étant réalisées, montrer que θ mesure l'un des angles du triangle ABC . Comment peut-on interpréter géométriquement ρ ?

2. Soit ABC un triangle pseudo-rectangle en A , obtus en B et dont les longueurs des côtés sont des nombres rationnels; soit ρ et θ les deux réels définis au 1.iii.
Dans cette question, on pourra utiliser sans justification les formules trigonométriques suivantes vérifiées par tout réel φ pour lequel $\tan \varphi$ est définie :

$$\cos 2\varphi = \frac{1 - \tan^2 \varphi}{1 + \tan^2 \varphi}, \quad \sin 2\varphi = \frac{2 \tan \varphi}{1 + \tan^2 \varphi}$$

- a. Montrer que ρ est rationnel et en déduire que $\tan \frac{\theta}{2}$ est rationnel. Soient p et q les entiers strictement positifs et premiers entre eux tels que $\tan \frac{\theta}{2} = \frac{p}{q}$.
- b. Vérifier que $0 < p < q(\sqrt{2} - 1)$ et établir l'existence d'un rationnel strictement positif r tel que :

$$\begin{aligned} a &= r(p^4 - 6p^2q^2 + q^4) \\ b &= r(q^4 - p^4) \\ c &= 2pqr(p^2 + q^2) \end{aligned}$$

3. Montrer réciproquement que les formules du 2.b. définissent les longueurs des côtés d'un triangle pseudo-rectangle en A , obtus en B et dont les longueurs des côtés sont rationnelles.
4. a. Soient p et q deux entiers strictement positifs premiers entre eux. Déterminer le plus grand diviseur commun aux trois entiers $p^4 - 6p^2q^2 + q^4, q^4 - p^4, 2pq(p^2 + q^2)$ (on discutera suivant la parité de p et q).
b. Décrire les triplets d'entiers (a, b, c) tels qu'il existe un triangle ABC , pseudo-rectangle en A obtus en B , tel que $AB = c, BC = a$ et $CA = b$.
5. Résoudre dans \mathbb{N}^* l'équation $x^2(y^2 + z^2) = (y^2 - z^2)^2$.
6. Résoudre dans \mathbb{Q}^* l'équation $x^2(y^2 + z^2) = (y^2 - z^2)^2$.
7. Résoudre dans \mathbb{N}^* l'équation $x^2(y^2 - z^2)^2 = (y^2 + z^2)^3$.

3 Troisième partie

Soit \mathcal{H} la courbe définie par $x \geq 1$ et $y = \sqrt{x^2 - 1}$. Soient A un point de \mathcal{H} et (r, s) le couple de ses coordonnées. On note \mathcal{A} l'aire de la partie du plan définie par les relations $1 \leq x \leq r$ et $y^2 \leq x^2 - 1$.

1. Calculer \mathcal{A} en fonction de r et de s (on pourra par exemple effectuer une rotation du repère d'angle $-\pi/4$).
2. *Le but de cette question est de retrouver le résultat précédent en utilisant une méthode dont le principe remonte à Fermat, sans doute peu après 1658 : « De æquationum localium transmutatione et emendatione ad ultimodam curvilinearum inter se vel cum rectilineis comparationem, cui annectitur proportionis geometricæ in quadrandis infinitis parabolis et hyperbolis usu » (Œuvres complètes, Tome I, pages 225-285).*

Soient n un entier naturel non nul et u un réel positif tel que $u^n = r + s$. Pour tout entier k entre 1 et n , on considère le trapèze rectangle T_k (éventuellement réduit à un triangle) dont le côté oblique est le segment ayant pour extrémités les points de coordonnées $(u^{k-1}, 0)$ et $(u^k, 0)$, dont les bases ont pour pente -1 et dont l'un des angles droits a pour sommet le point de \mathcal{H} d'abscisse $\frac{u^{k-1} + u^{1-k}}{2}$.

- a. On définit bien ainsi, pour chaque valeur de k , un unique trapèze T_k (réduit à un triangle lorsque $k = 1$) : illustrer par un croquis.
 - b. Pourquoi peut-on conjecturer que la somme des aires de ces trapèzes admet $\frac{\mathcal{A} + s^2}{2}$ comme limite lorsque n tend vers l'infini ?
 - c. Démontrer la conjecture précédente en utilisant une autre suite de trapèzes combinée à la première.
 - d. Retrouver la valeur de \mathcal{A} .
3. Soient B et C les points de coordonnées respectives $(1, 0)$ et $(-1, 0)$ et A un point de coordonnées (x, y) avec $x \geq 0$ et $y \geq 0$ tel que le triangle ABC soit pseudo-rectangle en A .

On note S l'aire du triangle ABC et S' l'aire de la partie du plan constituée des points de la plaque triangulaire définie par le triangle ABC dont les coordonnées (X, Y) vérifient $Y^2 \leq X^2 - 1$.

Étudier une éventuelle limite lorsque x tend vers l'infini du rapport $\frac{S'}{S}$.

4 Quatrième partie

Cette partie se déroule dans l'espace rapporté à un repère orthonormé direct $(O; \vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ associé aux coordonnées (x, y, z) .

Dans le plan d'équation $z = 0$, soit (C) le cercle de centre O et de rayon 1 et soient T et P deux points distincts tels que la droite (TP) soit tangente au cercle (C) en T . Soient B et C les intersections de la droite (OP) avec le cercle (C) et (D) la droite perpendiculaire au plan d'équation $z = 0$ passant par P .

1.
 - a. Montrer qu'il existe deux points A et A' appartenant à la droite (D) tels que les triangles ABC et $A'BC$ soient pseudo-rectangles respectivement en A et A' ; donner une construction simple de ces deux points.
 - b. Montrer que les coordonnées de ces deux points vérifient l'égalité $x^2 + y^2 = z^2 + 1$.
2. Soit (H) l'ensemble des points A et A' quand T et P varient.
 - a. Quelle est l'intersection de l'ensemble (H) avec un plan orthogonal à \vec{w} ?
 - b. Quelle est l'intersection de l'ensemble (H) avec un plan contenant la droite $(O; \vec{w})$?
 - c. Montrer que l'ensemble (H) est inclus dans une réunion de droites que l'on précisera.
3. On s'intéresse dans cette dernière question aux points entiers de l'ensemble (H) , c'est-à-dire aux éléments de (H) dont les trois coordonnées sont des nombres entiers.
 - a. Soit (x, y, z) le triplet des coordonnées d'un tel point. Montrer que x ou y est impair. On note désormais \mathcal{S} l'ensemble des triplets (x, y, z) d'entiers naturels strictement positifs tels que x est impair et $x^2 + y^2 = z^2 + 1$.
 - b. Soit d un entier strictement positif fixé. Démontrer que l'ensemble des éléments (x, y, z) de \mathcal{S} tels que $\text{PGCD}(x + 1, y + z) = d$ est l'ensemble vide si d est impair et un ensemble infini si d est pair.
 - c. Soit m un entier naturel impair supérieur ou égal à 3. Combien y a-t-il d'éléments (x, y, z) de \mathcal{S} tels que $x = m$? Déterminer ces éléments lorsque $m = 3, 5, 7, 9$.