

## 1 Problème 1 : Les premiers sont en haut, les exposants sont en bas

Pour tout entier  $n \geq 2$ , on dispose de la décomposition en facteurs premiers :

$$n = p_1^{a_1} p_2^{a_2} \cdots p_k^{a_k}$$

où les nombres premiers distincts  $p_1, p_2, \dots, p_k$  sont les diviseurs premiers de  $n$ , et les exposants  $a_1, a_2, \dots, a_k$  sont des entiers strictement positifs. On pose alors :

$$f(n) = a_1^{p_1} a_2^{p_2} \cdots a_k^{p_k}$$

Par exemple, si  $n = 720 = 2^4 3^2 5^1$ , on a  $f(n) = 4^2 2^3 1^5 = 128$ .

En posant de plus  $f(1) = 1$ , on obtient une fonction  $f$  de  $\mathbb{N}^*$  dans  $\mathbb{N}^*$ .

Enfin, pour  $n \in \mathbb{N}^*$ , on définit  $f^i(n)$  par récurrence sur  $i \in \mathbb{N}$ , de façon que  $f^0(n) = n$  et

$$\text{pour tout } i \in \mathbb{N}, \quad f^{i+1}(n) = f(f^i(n))$$

Par exemple :  $f^0(720) = 720$ ,  $f^1(720) = f(720) = 128$ ,  $f^2(720) = f(128) = 49$ .

Le but de ce problème est d'étudier le comportement de la fonction  $f$  et des suites  $(f^i(n))_{i \in \mathbb{N}}$  pour  $n$  fixé.

1. **a.** Calculer  $f(2012)$ .
- b.** Déterminer les nombres  $f^i(36^{36})$  pour  $0 \leq i \leq 3$ . Que peut-on dire des suivants ?
2. **a.** Donner un exemple d'entier  $n \geq 1$  tel que, pour tout entier naturel  $i$ , on ait :

$$f^{i+2}(n) = f^i(n) \quad \text{et} \quad f^{i+1}(n) \neq f^i(n)$$

- b.** Montrer que la fonction  $f$  n'est ni croissante ni décroissante.
3. Résoudre dans  $\mathbb{N}^*$  :
  - a.** l'équation  $f(n) = 1$ ;
  - b.** l'équation  $f(n) = 2$ ;
  - c.** l'équation  $f(n) = 4$ .
4. **a.** Pour tous entiers  $a \geq 2$  et  $b \geq 0$ , montrer que  $ab \leq a^b$ .
- b.** Soit  $k \in \mathbb{N}^*$  et soient  $a_1, \dots, a_k, b_1, \dots, b_k$  des entiers tels que  $a_i \geq 2$  et  $b_i \geq 0$  pour tout  $i$ . Montrer que :
 
$$a_1 b_1 + a_2 b_2 + \cdots + a_k b_k \leq a_1^{b_1} a_2^{b_2} \cdots a_k^{b_k}$$
- c.** Pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , montrer que  $f(f(n)) \leq n$ .
- d.** Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ . Montrer qu'il existe un entier naturel  $r$  tel que, pour tout entier  $i \geq r$ , on ait  $f^{i+2}(n) = f^i(n)$ .
5. Soit  $E$  l'ensemble des entiers  $n \geq 2$  n'ayant que des exposants strictement supérieurs à 1 dans leur décomposition en facteurs premiers.

- a.** Pour tout entier  $a \geq 2$ , montrer qu'il existe des entiers naturels  $\alpha$  et  $\beta$  tels que :

$$a = 2\alpha + 3\beta$$

- b.** En déduire que si  $n$  appartient à  $E$ , alors il existe un élément  $m$  de  $E$  tel que  $f(m) = n$ .
- c.** Donner un élément  $m$  de  $E$  tel que  $f(m) = 2012^{2012}$ .
- d.** Que peut-on dire de la réciproque du **b.** ?

## 2 Problème 2 : Une suite majoritairement décroissante

Soit  $(u_n)_{n \geq 0}$  une suite de nombres réels positifs telle que  $u_0 = 1$  et telle que, pour tout entier  $n \geq 1$ , au moins la moitié des termes  $u_0, u_1, \dots, u_{n-1}$  soient supérieurs ou égaux à  $2u_n$ . Montrer que  $u_n$  tend vers 0.

## 3 Problème 3 : Le facteur sonne toujours une fois (et une seule)

Un facteur doit distribuer le courrier dans une rue. Celle-ci ne comporte qu'une seule rangée de maisons régulièrement espacées et numérotées  $1, 2, \dots, n$ , où  $n$  est un entier supérieur ou égal à 2.

Le facteur doit distribuer une lettre par maison.

Pour cela, il commence par laisser son vélo à la maison 1 et y dépose la lettre correspondante ; puis il distribue les autres lettres dans les autres maisons, et revient enfin à la maison 1 récupérer son vélo.

Il effectue ainsi un trajet, représenté par les numéros successifs des maisons où il a déposé le courrier.

Par exemple, si  $n = 5$ , un trajet possible est  $1, 5, 2, 4, 3, 1$ . La distance totale parcourue, appelée longueur du trajet, vaut 12 dans ce cas car  $|5-1| + |2-5| + |4-2| + |3-4| + |1-3| = 12$ .

Un autre trajet possible est  $1, 3, 5, 4, 2, 1$ , de longueur 8.

1. Combien y a-t-il de trajets possibles ?
2. **a.** Montrer que tout trajet est de longueur supérieure ou égale à  $2(n-1)$
- b.** Combien y a-t-il de trajets de longueur minimale ?
3. **a.** Dans les cas  $n = 5$  et  $n = 6$ , déterminer la longueur maximale d'un trajet et donner un exemple de trajet de longueur maximale.
- b.** Pour  $n$  quelconque, déterminer la longueur maximale d'un trajet.
4. On tire un trajet au hasard (tous les trajets sont équiprobables). Quelle est l'espérance de la longueur du trajet ?