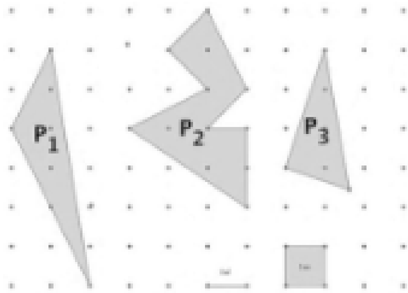
Exercice 2 : Polygones de PICK

Polygones de PICK

Dans tout le problème :

- On note une unité de longueur 1 u.l et une unité d'aire 1 u.a.
- On travaille dans un réseau pointé à maille carrée de côté 1.
- On appelle polygone de PICK un polygone non aplati construit sur un tel réseau et dont chacun des sommets est un point du réseau.
- On note i le nombre de points du réseau strictement intérieurs à ce polygone et b le nombre de points du réseau sur le bord du polygone.
- On note A l'aire du polygone de PICK.



Dans la figure ci-contre, les polygones P_1 et P_2 sont des polygones de PICK et le polygone P_3 ne l'est pas.

Pour le polygone P_1, on a $i = 3$ et $b = 4$; pour le polygone P_2, on a $i = 3$ et $b = 9$.

Partie I : Étude de quelques polygones de PICK

Questions 1 : le cas d'un rectangle de PICK

Q 1-a : Pour le rectangle de PICK de la figure 1 ci-contre, déterminer i, b et A.

Q 1-b : Calculer $i + \dfrac{b}{2} - 1$. Que constate-t-on ?

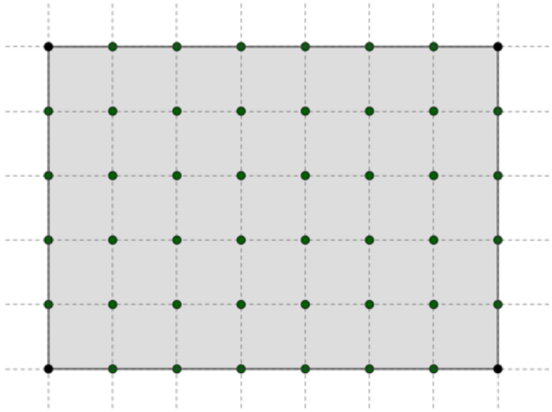


Figure 1: Figure 1 questions 1

Questions 2 : le cas des rectangles de PICK

Soit $ABCD$ un rectangle de PICK de dimensions quelconques dont les côtés sont parallèles au réseau (comme dans la figure 2 ci-contre). On note L sa longueur et l sa largeur. Soient b_R le nombre de points sur les bords du rectangle $ABCD$ et i_R le nombre de ses points strictement intérieurs.

Q 2-a : Exprimer en fonction de L le nombre de points sur le côté $[AD]$ extrémités comprises ?

Q 2-b : Exprimer b_R et i_R en fonction de L et l.

Q 2-c : En déduire que l'aire A_R du rectangle vérifie $A_R = i_R + \dfrac{b_R}{2} - 1$.

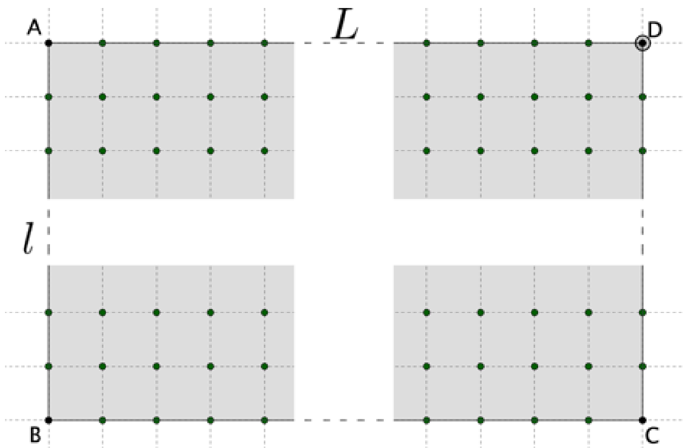


Figure 2: Figure 2 questions 2

Questions 3 : le cas d'un triangle rectangle de PICK

Q 3-a : Pour le triangle de PICK ABC rectangle en C ci-contre, déterminer i, b et A.

Q 3-b : Sur cet exemple, vérifier que l'on a $A = i + \dfrac{b}{2} - 1$.

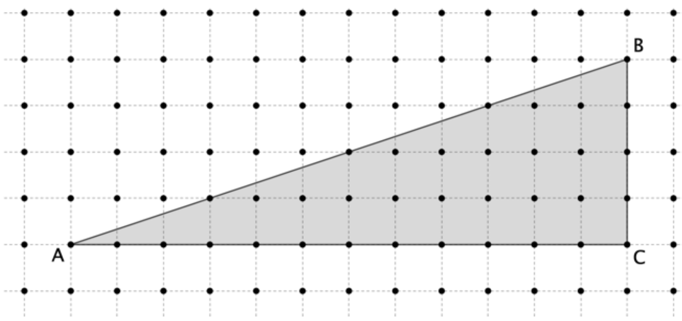


Figure 3: Figure 3 questions 3

Questions 4 : le cas des triangles rectangles de PICK

On considère le triangle rectangle de PICK ABC de la figure 2 tracé sur la figure 4. Soient b_T le nombre de points sur les bords du triangle rectangle ABC, i_T le nombre de ses points strictement intérieurs et k le nombre de points du réseau sur le segment $[AC]$ exceptés les points A et C.

Q 4-a : Justifier que $b_R = 2b_T - 2 - 2k$.

Q 4-b : Justifier que $i_R = 2i_T + k$.

Q 4-c : En déduire que l'aire A_T du triangle rectangle ABC vérifie $A_T = i_T + \frac{b_T}{2} - 1$.

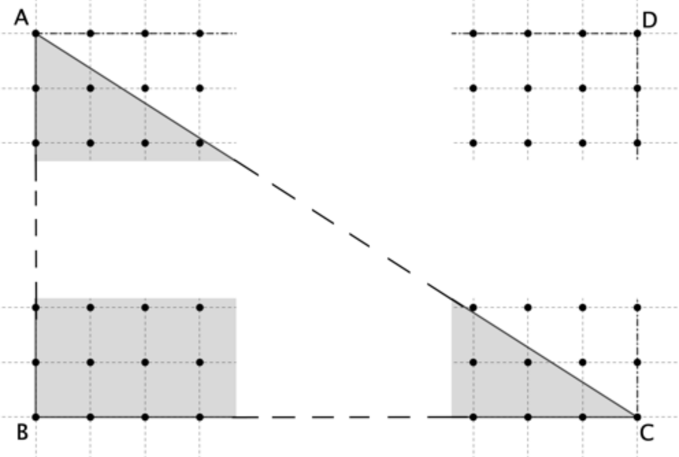


Figure 4: Figure 4 questions 4

Questions 5 : le cas de points intérieurs alignés dans un polygone de PICK

Q 5-a : Pour la figure de l'annexe 1, déterminer i, b et A.

Q 5-b : Vérifier que l'on a encore $A = i + \frac{b}{2} - 1$.

Q 5-c : Sur l'annexe 2, tracer un polygone de PICK avec $i = 4$ et $b = 3$.

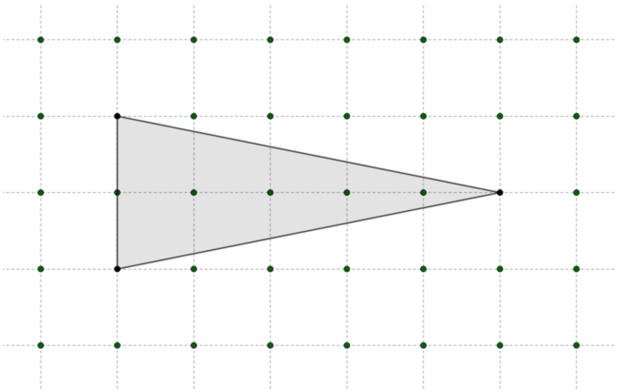
On appelle formule de PICK la relation $A = i + \frac{b}{2} - 1$.

Partie II : formule de PICK pour un polygone de PICK quelconque

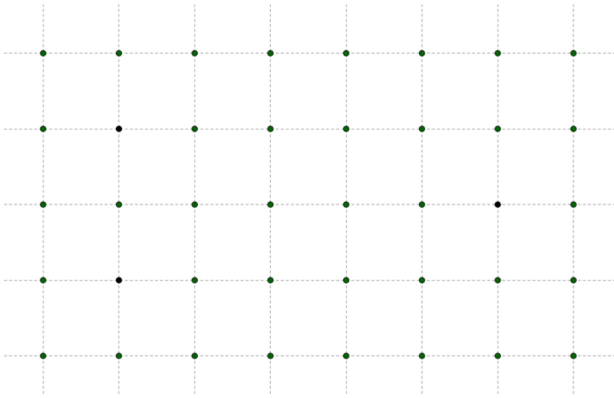
On admet que la formule de PICK reste valide pour un polygone de PICK quelconque.

Q 6 : Déterminer l'aire du polygone de PICK en annexe 3.

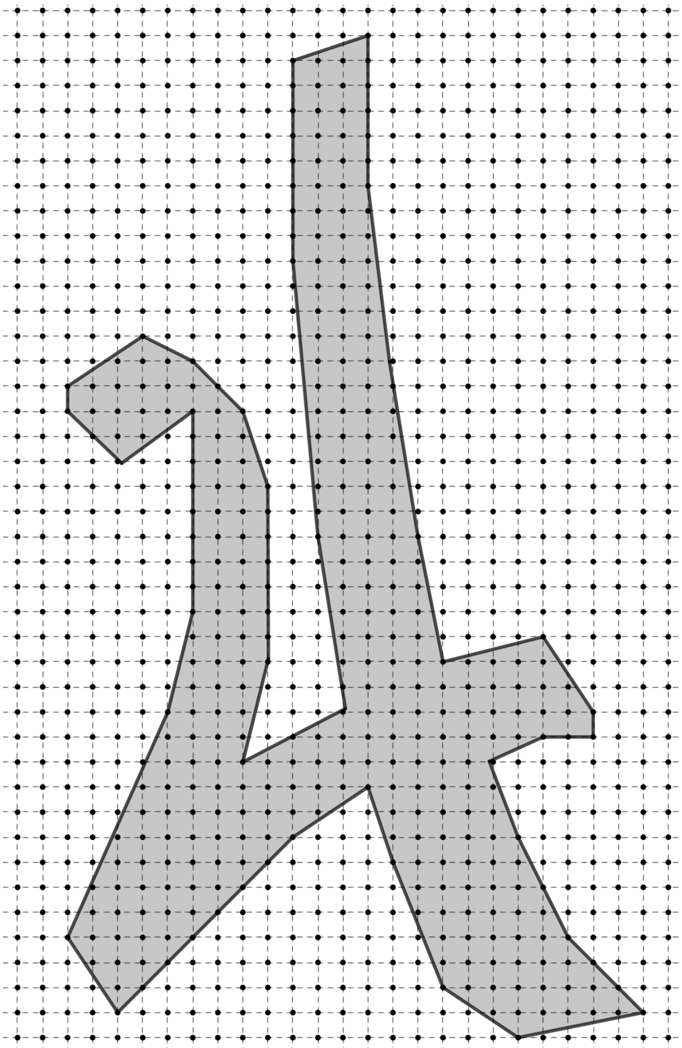
Annexes



Annexe 1



Annexe 2



Annexe 3

Polygone de PICK proche du logo de la candidature de Paris aux J.O. de 2024